

Test 3 de Statistique 2

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. gaussiennes centrées et de variance σ_ε^2 . Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit

$$X_n = \frac{n+1}{n} + \varepsilon_n + 2\varepsilon_{n-1}.$$

1. Déterminer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\text{var}(X_n)$.
2. Déterminer la loi du vecteur (X_1, \dots, X_n) .
3. Démontrer que (X_n) converge en loi vers une loi que l'on précisera.
4. Démontrer que \overline{X}_n converge en probabilité et préciser sa limite.

Proof. 1. On a $\mathbb{E}[X_n] = \frac{n+1}{n} + \mathbb{E}[\varepsilon_n] + 2\mathbb{E}[\varepsilon_{n-1}] = \frac{n+1}{n}$.

Comme les ε_n sont indépendantes, $\text{var}(X_n) = \text{var}(\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n-1}) = \text{var}(\varepsilon_n) + 4\text{var}(\varepsilon_{n-1}) = \sigma_\varepsilon^2 + 4\sigma_\varepsilon^2 = 5\sigma_\varepsilon^2$.

2. Le vecteur (X_1, \dots, X_n) est une transformation affine d'un vecteur gaussien $X = A\varepsilon + m$ avec A matrice de réels et où $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)^t$ est gaussien. Donc (X_1, \dots, X_n) est un vecteur gaussien. De plus, $\text{var}(X_i) = 5\sigma_\varepsilon^2$ et $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ si $|i - j| > 1$, puisqu'il n'y a pas de ε_k en commun. Enfin, $\text{cov}(X_i, X_{i-1}) = \text{cov}(\varepsilon_i + 2\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i-1} + 2\varepsilon_{i-2}) = 2\sigma_\varepsilon^2$. Donc la matrice de covariance est tridiagonale :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5\sigma_\varepsilon^2 & 2\sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_\varepsilon^2 & 5\sigma_\varepsilon^2 & 2\sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\sigma_\varepsilon^2 & 5\sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(\left(\frac{i+1}{i}\right)_{1 \leq i \leq n}, \Sigma\right)$.

3. On a $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n-1}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 5\sigma_\varepsilon^2)$. Donc, en utilisant le Lemme de Slutsky on en déduit que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(1, 5\sigma_\varepsilon^2)$.

4. Comme $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, on a $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{k-1}$.
On a d'abord $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Comme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

De plus, on peut appliquer la loi faible des grands nombres (les (ε_i) sont i.i.d. et $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|] < \infty$) et donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$ et $\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{k-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$. En utilisant le résultat sur la somme des limites en probabilités, on en déduit que $\overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 1$.

□