

Test 2 de Statistique 2

Soit le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)$, de loi continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 et de densité:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\left(x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 + 6x_2 + 5\right)\right) \text{ pour } (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

1. Démontrer que X a pour loi $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right)$.
2. Déterminer la loi de X_1 .
3. Déterminer une constante a telle que $X_1 + aX_2$ soit indépendante de X_1 . Déterminer la loi du vecteur $(X_1, X_1 + aX_2)$.
4. Déterminer la loi de $Z = 2X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2 - 8X_1 + 12X_2 + 10$.

Proof. 1. Si $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ alors $\det(\Gamma) = 1/4 \neq 0$: la loi de X est absolument continue par rapport à λ_2 et on peut utiliser la formule de la densité. Comme $\Gamma^{-1} = 4 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ on en déduit que:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(2(x_1 - 1)^2 - 4(x_1 - 1)(x_2 + 1) + 4(x_2 + 1)^2\right)\right),$$

soit la formule proposée.

2. On a $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(1, 1)$.
3. Comme (X_1, X_2) vecteur gaussien, il en est de même pour $(X_1, X_1 + aX_2)$ pour tout $a \in \mathbf{R}$ puisqu'il s'agit d'une transformation linéaire de (X_1, X_2) . Alors, montrer que X_1 et $X_1 + aX_2$ sont indépendantes revient à montrer que $\text{cov}(X_1, X_1 + aX_2) = 0$. Mais $\text{cov}(X_1, X_1 + aX_2) = \text{var}(X_1) + a \text{cov}(X_1, X_2) = 1 + a \frac{1}{2}$: si $a = -2$ alors X_1 et $X_1 + aX_2$ sont indépendantes. Le vecteur $(X_1, X_1 + aX_2)$ est gaussien, et pour trouver sa loi il revient juste de trouver l'espérance et la variance de $X_1 + aX_2 = X_1 - 2X_2$: soit $\mathbb{E}[X_1 - 2X_2] = 1 - 2(-1) = 3$ et $\text{var}(X_1 - 2X_2) = \text{var}(X_1) - 4 \text{cov}(X_1, X_2) + 4 \text{var}(X_2) = 1 - 2 + 2 = 1$. Donc $(X_1, X_1 + aX_2) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
4. On a $Z = {}^t \begin{pmatrix} X_1 - 1 \\ X_2 + 1 \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} X_1 - 1 \\ X_2 + 1 \end{pmatrix}$. Comme Γ est inversible, on sait que $U = \Gamma^{-1/2}(X - \mathbb{E}[X])$ suit la loi $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Or $Z = {}^t U U = \|U\|^2$ et on sait alors que $Z \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \chi^2(2)$. □