Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2024 – 2025

Test 2 de Statistique 2

Avec $c \in \mathbf{R}$, on considère le couple (X, Y) de variables aléatoires de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ avec pour densité:

$$f(x,y) = c\, e^{-\theta\, x}\, \mathbb{I}_{0<y<x} \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

1. Démontrer que $c = \theta^2$.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Sont-elles des variables indépendantes?
3. Déterminer $\operatorname{cov}(X, Y)$.
4. Soit $Z = Y/X$. Démontrer que le couple (Z, X) a pour densité $f(z,x) = \theta^2 xze^{-\theta x}\mathbb{I}_{0<z<1, 0<x}$. Déterminer la loi de Z et montrer que Z et X sont indépendantes.

Proof. 1. On calcule avec une IPP:

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = c\int_0^\infty \overset{x}{\underset{0}{\inf}}\, e^{-\theta\, x}dydx = \int_0^\infty x\, e^{-\theta\, x}dx = c\Big(\big[-\frac{1}{\theta}x\, e^{-\theta\, x}\big]_0^\infty + \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-\theta\, x}dx\Big) = \frac{1}{\theta^2}.$$

2. X et Y sont des v.a. continues puisque (X, Y) est un vecteur aléatoire absolument continu. Si f_X et f_Y sont les densités de X et Y, celles-ci sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$f_X(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy = \int_0^x \theta^2\, e^{-\theta\, x}dy = \theta^2\, x\, e^{-\theta\, x}$$

$$\text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx = \int_y^\infty \theta^2\, e^{-\theta\, x}dx = \theta^2\,\big[-\theta e^{-\theta\, x}\big]_y^\infty = \theta\, e^{-\theta\, x}.$$

On remarque que X est une v.a. de loi Gamma de paramètre $(2, \theta)$ et Y est une v.a. de loi exponentielle de paramètre θ.
On voit bien que $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$: les variables ne sont pas indépendantes.

3. On a:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \int_{\mathbf{R}^2} x\, y\, f(x,y)\, dxdy - \mathbb{E}[\mathcal{E}(\theta)]\, \mathbb{E}[\Gamma(2,\theta)] \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \theta^2\, x\, y\, e^{-\theta\, x}\, dydx - \frac{1}{\theta}\,\frac{2}{\theta} \\
&= \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^\infty x^3\, e^{-\theta\, x}dx - \frac{2}{\theta^2} \\
&= \frac{3}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

4. On cherche à déterminer la densité du couple (Z, X) à partir de la fonction de répartition conjointe. Il est clair que $Z : \Omega \to]0, 1[$. Donc pour $(z, x) \in]0, 1[\times]0, \infty[$:

$$F_{(Z,X)}(z,x) = \mathbb{P}(Z \leq z, X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \leq z,\ X \leq x\right) = P(Y \leq zX,\ X \leq x)$$

Ainsi, on obtient:

$$F_{(Z,X)}(z,x) = \int_0^x \int_0^{zu} \theta^2 e^{-\theta u}\, dv\, du = \int_0^x \theta^2 zu e^{-\theta u}\, du = \theta^2 z \int_0^x u e^{-\theta u}\, du.$$

D'où:

$$f_{(Z,X)}(z,x) = \frac{\partial^2 F_{(Z,X)}}{\partial z\, \partial x}(z,x) = \theta^2\, x\, e^{-\theta x}\, \mathbb{I}_{0<z<1,\ x>0}$$

Pour obtenir la densité marginale de Z, on intègre cette densité par rapport à x :

$$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} f_{Z,X}(z,x)\, dx = \int_0^{+\infty} \theta^2 z x e^{-\theta x}\, dx = \mathbb{I}_{0<z<1} \quad \Longrightarrow \quad Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}(]0,1[).$$

Il est clair que X et Z sont indépendantes car $f_{(Z,X)}(z,x) = f_Z(z)\, f_X(x)$.

$\square$

Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE $2024 - 2025$

Test 2 de Statistique 2

Avec $c \in \mathbf{R}$, on considère le couple (X, Y) de variables aléatoires de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ avec pour densité:

$$f(x,y) = c\, e^{-\lambda\, x}\, \mathbb{I}_{0<x<y} \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

1. Démontrer que $c = \lambda^2$.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Sont-elles des variables indépendantes?

3. Déterminer $\mathrm{cov}(X, Y)$.

4. Soit $Z = X/Y$. Démontrer que le couple (Z, Y) a pour densité $f(z, y) = \lambda^2 y z e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{0<z<1, 0<y}$. Déterminer la loi de Z et montrer que Z et Y sont indépendantes.