Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2024 – 2025

Exercices supplémentaires TD5 Statistique 2

Exercice 1:

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de v.a.i.i.d. de loi absolument continue de densité:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2(1-x)}{(1-\theta)^2}, & \text{si } \theta \le x \le 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{où } \theta \in [0,1[\text{ est un paramètre inconnu.}$$

1. Vérifier que f_θ est une densité
2. Déterminer le modèle statistique et la fonction de vraisemblance.
3. Démontrer que ce modèle admet un unique estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}$ de θ.
4. Démontrer que $n\left(\widehat{\theta} - \theta\right)$ tend en loi vers une distribution à préciser. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% sur θ.
5. Déterminer l'espérance de X_1. En déduire un autre estimateur possible pour θ.

Proof.

1. On a f_θ qui est une fonction mesurable (car continue) et positive. De plus, on vérifie que :
$$\int_\theta^1 \frac{2(1-x)}{(1-\theta)^2}\, dx = \frac{2}{(1-\theta)^2} \int_\theta^1 (1-x) dx = \frac{2}{(1-\theta)^2}\, \frac{(1-\theta)^2}{2} = 1.$$
Donc, f_θ est bien une densité de probabilité.
2. Le modèle statistique est $\Big([0,1]^n, \mathcal{B}([0,1]^n), \Big(\int f_\theta d\lambda_{[0,1]}\Big)^{\otimes n}, \theta \in [0,1[\Big)$.
Pour $(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$, du fait de l'indépendance et de l'i.d., on a pour vraisemblance:
$$L_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{2(1-x_i)}{(1-\theta)^2}\, \mathbb{I}_{\theta \le x_i} = 2^n\, (1-\theta)^{-2n} \Big(\prod_{i=1}^n (1-x_i)\Big)\, \mathbb{I}_{\theta \le \min(x_i)}.$$
3. On voit que $L_\theta(X_1, \dots, X_n) = 0$ si $\theta > \min_i(X_i)$. On considérera donc des valeurs de θ dans $[0, \min_i(X_i)]$ et on veut maximiser la fonction $\theta \in [0, \min_i(X_i)] \to L_\theta(X_1, \dots, X_n)$. La log-vraisemblance $\ell(\theta)$ sur $[0, \min_i(X_i)]$ est définie par:
$$\ell(\theta) = \log\big(L_\theta(X_1, \dots, X_n)\big) = n\, \log(2) - 2n\, \log(1-\theta) + \sum_{i=1}^n \log(1-x_i).$$
On a $\ell'(\theta) = \frac{2n}{1-\theta}$: fonction strictement croissante qui atteint son maximum en $\min_i(X_i)$. D'où
$$\widehat{\theta} = \min(X_1, \dots, X_n).$$
4. Soit F_θ la fonction de répartition de X. Pour $x \in]-\infty, \theta|$, $F_\theta(x) = 0$. Pour $x \in [\theta, 1]$,
$$F_\theta(x) = \int_\theta^x \frac{2(1-t)}{(1-\theta)^2} dt = \frac{(1-\theta)^2 - (1-x)^2}{(1-\theta)^2} = \frac{(x-\theta)\,(2-\theta-x)}{(1-\theta)^2}$$

Alors $\mathbb{P}(\widehat{\theta} > t) = \big(1 - F_\theta(t)\big)^n$. Donc $\mathbb{P}(\widehat{\theta} \le t) = 1 - \big(1 - F_\theta(t)\big)^n$ et ainsi pour $z \ge 0$:

$$\mathbb{P}\big(n(\widehat{\theta} - \theta) \le z\big) = 1 - \big(1 - F_\theta(\theta + z/n)\big)^n = 1 - \Big(1 - \frac{\frac{z}{n}\,(2 - 2\theta - z/n)}{(1-\theta)^2}\Big)^n.$$

Pour trouver la limite quand $n \to \infty$, on passe à l'exponentielle et donc:

$$\mathbb{P}\big(n(\widehat{\theta} - \theta) \le z\big) = 1 - \exp\Big(n \log\Big(1 - \frac{\frac{z}{n}\,(2 - 2\theta - z/n)}{(1-\theta)^2}\Big)\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \exp\Big(-2\,\frac{z}{(1-\theta)}\Big),$$

en utilisant le DL de $\log(1-u)$ en 0. On reconnait ici la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $2/(1-\theta)$.

5. On peut calculer l'espérance de X_1 :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_\theta^1 x\, f_\theta(x)\, dx = \frac{2}{(1-\theta)^2} \int_\theta^1 x(1-x)\, dx = \frac{2}{(1-\theta)^2} \Big[\frac{1}{2}\, x^2 - \frac{1}{3}\, x^3\Big]_\theta^1 = \frac{1}{3\,(1-\theta)^2}\,\big(1 - 3\,\theta^2 + 2\,\theta^3\big)$$
$$= \frac{1 + \theta - 2\,\theta^2}{3\,(1-\theta)} = \frac{1}{3}\,(1 + 2\theta).$$

On en déduit que $\theta = \frac{1}{2}\,(3\,\mathbb{E}[X_1] - 1)$. Donc comme $\overline{X}_n$ est un estimateur convergent de $\mathbb{E}[X_1]$, on en déduit que $\widetilde{\theta}_n = \frac{1}{2}\,(3\,\overline{X}_n - 1)$ est un autre estimateur convergent de θ (mais qui converge à vitesse $\sqrt{n}$ et non à vitesse n comme $\widehat{\theta}_n$, qui est donc bien plus intéressant).

□

Exercice 2:

On considère $(X_1, \dots, X_{2n})$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$ si $i \ne j$, $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$ si $1 \le i \le n$, $\mathbb{E}[X_i^2] = \alpha\,\sigma^2$ si $n + 1 \le i \le 2n$, avec $\sigma^2 > 0$ et $\alpha > 0$ deux paramètres à estimer.

1. $(X_1, \dots, X_{2n})$ est-elle une famille de v.a.i.i.d.?
2. Déterminer le modèle statistique et préciser la vraisemblance du vecteur $\theta = (\sigma^2, \alpha)$.
3. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}$ de θ est unique et s'écrit

$$\widehat{\theta} = (\widehat{\sigma}^2, \widehat{\alpha}) = \Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2\,,\ \frac{\sum_{k=n+1}^{2n} X_k^2}{\sum_{k=1}^n X_k^2}\Big).$$

4. Démontrer que $\widehat{\theta} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \theta$.
5. Démontrer un TLC pour $\frac{1}{n\,\sigma^2} \sum_{k=n+1}^{2n} X_k^2$ et en déduire en justifiant un TLC pour $\widehat{\alpha}$. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour α.
6. Déterminer l'information de Fisher du modèle. L'estimateur $\widehat{\theta}$ est-il efficace?

Proof. 1. Bien que les variables soient indépendantes et gaussiennes centrées, leurs variances diffèrent selon que $i \le n$ ou $i > n$. Elles ne sont donc pas identiquement distribuées.

2. Le modèle statistique est: $\big(\mathbf{R}^{2n}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}), \mathcal{N}(0, \sigma^2)^{\otimes n} \otimes \mathcal{N}(0, \alpha\,\sigma^2)^{\otimes n},\ \theta = (\sigma^2, \alpha) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*\big)$.
Pour $(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n}$, du fait de l'indépendance on peut écrire que la densité jointe du vecteur est:

$$L_\theta(x_1, \dots, x_{2n}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \prod_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_j^2}{2\alpha\sigma^2}\right).$$

Ce qui se simplifie par:

$$L_\theta(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\, \frac{1}{(\sigma^2)^n}\, \frac{1}{\alpha^{n/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i^2\Big)\Big).$$

3. La log-vraisemblance en $(X_1,\dots,X_{2n})$ est donc:

$$\ell(\theta) = -n\,\log(2\pi\sigma^2) - \frac{n}{2}\,\log(\alpha) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{2\alpha\sigma^2}\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2.$$

On maximise $\theta \to \ell(\theta)$ en dérivant partiellement:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ell(\theta)}{\partial \sigma^2} &= -\dfrac{n}{\sigma^2} + \dfrac{1}{2\,\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \dfrac{1}{2\alpha\,\sigma^4}\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2 \\ \dfrac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} &= -\dfrac{n}{2\alpha} + \dfrac{1}{2\alpha^2\sigma^2}\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2. \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations $\dfrac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = 0$, on obtient $\widehat{\theta} = (\widehat{\sigma}^2, \widehat{\alpha})$:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \widehat{\alpha} = \frac{\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

On vérifie que la matrice hessienne $\dfrac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2}$ en $\theta = \widehat{\theta}$ est négative:

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sigma^4} - \dfrac{1}{\sigma^6}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{1}{\alpha\,\sigma^6}\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2 & -\dfrac{1}{2\alpha^2\,\sigma^4}\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2 \\ -\dfrac{1}{2\alpha^2\,\sigma^4}\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2 & \dfrac{n}{2\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha^3\sigma^2}\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} x_j^2 \end{pmatrix}.$$

D'où $\dfrac{\partial^2 \ell(\widehat{\theta})}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{n}{\widehat{\sigma}^4} & -\dfrac{n}{2\,\widehat{\alpha}\,\widehat{\sigma}^2} \\ -\dfrac{n}{2\,\widehat{\alpha}\,\widehat{\sigma}^2} & -\dfrac{n}{2\,\widehat{\alpha}^2} \end{pmatrix}$ qui est clairement une matrice négative. C'est donc bien un maximum local, qui est aussi un maximum global.

4. Par la loi faible des grands nombres appliquée aux (X_i^2) qui sont des v.a.i.i.d. d'espérance finie, on a:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2, \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} X_j^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \alpha\,\sigma^2.$$

Donc :

$$\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2, \quad \widehat{\alpha} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} X_j^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \frac{\alpha\sigma^2}{\sigma^2} = \alpha.$$

5. Les variables $(X_j^2)_{n+1\leq j}$ sont des v.a.i.i.d., d'espérance $\alpha\,\sigma^2$ et de variance finie $2\,\alpha^2\,\sigma^4$. Donc on peut appliquer le TLC et on obtient:

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} X_j^2 - \alpha\,\sigma^2\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,2\,\alpha^2\,\sigma^4\right) \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n\,\sigma^2}\sum_{j=n+1}^{2n} X_j^2 - \alpha\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,2\,\alpha^2\right). \tag{1}$$

Mais par le TLC, on a également:

$$\sqrt{n}\Big(\alpha\,\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} - \alpha\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,2\,\alpha^2\right). \tag{2}$$

Des TLC (1) et (2), et du fait que les deux sommes sont indépendantes (donc la variance limite est la somme des 2 variances limites), on obtient finalement:

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n\,\sigma^2}\sum_{j=n+1}^{2n} X_j^2 - \alpha\Big) - \sqrt{n}\Big(\alpha\,\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} - \alpha\Big) = \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n\,\sigma^2}\sum_{j=n+1}^{2n} X_j^2 - \alpha\,\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,4\,\alpha^2\right).$$

Comme $\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$, en multipliant le TLC précédent par $\sigma^2/\widehat{\sigma}^2$, et en utilisant le Lemme de Slutsky, on obtient:

$$\sqrt{n}\,\frac{\sigma^2}{\widehat{\sigma}^2}\,\Big(\frac{1}{n\,\sigma^2}\sum_{j=n+1}^{2n} X_j^2 - \alpha\,\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}\Big) = \sqrt{n}\,\left(\widehat{\alpha} - \alpha\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,4\,\alpha^2\right).$$

Pour obtenir un intervalle de confiance à 95% sur α, on réécrit le TLC précédent et on obtient:

$$\sqrt{n}\Big(\frac{\widehat{\alpha}}{2\,\alpha}-\frac{1}{2}\Big)\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\ \mathcal{N}\,(0\,,\,1)\,.$$

On obtient ainsi avec le quantile $q_{0.975}\simeq 1.96$ à 97.5% d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ que

$$\mathbb{P}\Big(-q_{0.975}\leq\sqrt{n}\Big(\frac{\widehat{\alpha}}{2\,\alpha}-\frac{1}{2}\Big)\leq q_{0.975}\Big)\simeq 0.95\quad\Longrightarrow\quad\mathbb{P}\Big(\Big(\frac{1}{1+\frac{2\,q_{0.975}}{\sqrt{n}}}\Big)\,\widehat{\alpha}\leq\alpha\leq\Big(\frac{1}{1-\frac{2\,q_{0.975}}{\sqrt{n}}}\Big)\,\widehat{\alpha}\Big)\simeq 0.95.$$

6. On calcule l'information de Fisher grâce au calcul de la matrice Hessienne précédente et en prenant $-\mathbb{E}$ de cette matrice:

$$I(\theta)=-\mathbb{E}\left(\begin{array}{cc}\displaystyle\frac{n}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{\alpha\,\sigma^6}\sum_{j=n+1}^{2n}x_j^2 & \displaystyle-\frac{1}{2\alpha^2\,\sigma^4}\sum_{j=n+1}^{2n}x_j^2\\ \displaystyle-\frac{1}{2\alpha^2\,\sigma^4}\sum_{j=n+1}^{2n}x_j^2 & \displaystyle\frac{n}{2\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^3\sigma^2}\sum_{j=n+1}^{2n}x_j^2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\displaystyle\frac{n}{\sigma^4} & \displaystyle\frac{n}{2\alpha\,\sigma^2}\\ \displaystyle\frac{n}{2\alpha\,\sigma^2} & \displaystyle\frac{n}{2\alpha^2}\end{array}\right).$$

Le modèle est régulier donc l'estimateur de maximum de vraisemblance est asymptotiquement efficace.

$\square$