

*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2025 – 2026

# Feuilles de TD, cours de L3 Statistique 2

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: [bardet@univ-paris1.fr](mailto:bardet@univ-paris1.fr)

Page oueb: <https://www.pantheonsorbonne.fr/page-perso/jean-marc.bardet>

## Feuille n° 1:

### Variables aléatoires

1. (\*) Soit l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  où  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  la tribu borélienne sur  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  la probabilité uniforme sur  $[0, 1]$ .

- (a) On pose  $X$  la variable aléatoire telle que  $X(\omega) = 1 - \omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Déterminer la loi de probabilité de  $X$ , son espérance et sa variance.
- (b) Répondre aux mêmes questions pour  $Y(\omega) = -\ln(\omega)$ .
- (c) On pose  $Z(\omega) = \omega$  pour  $\omega \in [0.5, 1]$  et  $Z(\omega) = 0$  pour  $\omega \in [0, 0.5[$ . Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ , son espérance et sa variance.

*Proof.* (a) La variable  $X$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  car  $1 - \omega \in [0, 1]$  pour tout  $\omega \in [0, 1]$ . Donc pour  $x \leq 0$ ,  $F_X(x) = 0$  et pour  $x \geq 1$ ,  $F_X(x) = 1$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , on a  $\{X \leq x\} = \{\omega \in [0, 1], 1 - \omega \leq x\} = \{\omega \in [0, 1], 1 - x \leq \omega\} = [1 - x, 1]$ . Or  $\mathbb{P}([1 - x, 1]) = x$  car  $\mathbb{P}$  mesure la longueur de l'intervalle, d'où  $F_X(x) = x$ . La loi de  $X$  est donc celle d'une variable uniforme sur  $[0, 1]$ , d'où  $\mathbb{E}[X] = 1/2$  et  $\text{var}(X) = 1/12$ .

(b) La variable  $Y$  est à valeurs dans  $[0, +\infty[$  car  $\ln(\omega) \leq 0$  pour tout  $\omega \in [0, 1]$ . Donc pour  $y \leq 0$ ,  $F_Y(y) = 0$ . Pour  $y \geq 0$ , on a  $\{Y \leq y\} = \{\omega \in [0, 1], -\ln(\omega) \leq y\} = \{\omega \in [0, 1], e^{-y} \leq \omega\} = [e^{-y}, 1]$ . Or  $\mathbb{P}([e^{-y}, 1]) = 1 - e^{-y}$  car  $\mathbb{P}$  mesure la longueur de l'intervalle, d'où  $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ :  $Y$  suit la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ , donc  $\mathbb{E}[Y] = 1$  et  $\text{var}(Y) = 1$ .

(c) Les valeurs prises par  $Z$  sont  $\{0\} \cup [0.5, 1]$ . Ainsi, pour  $z < 0$  alors  $F_Z(z) = 0$ , et pour  $z \geq 1$ ,  $F_Z(z) = 1$ . Si  $z \in [0, 0.5[$ ,  $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}([0, 0.5]) = 0.5$ . Si  $z \in [0.5, 1]$ ,  $F_Z(z) = 0.5 + \mathbb{P}(0.5 \leq Z \leq z) = 0.5 + \mathbb{P}([0.5, z]) = 0.5 + (z - 0.5) = z$ .

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{[0, 1/2]} 0 \, d\omega + \int_{[1/2, 1]} \omega \, d\omega = 0 + [\omega^2/2]_{1/2}^1 = 3/8.$$

$$\text{Et } \mathbb{E}[Z^2] = \int_{[0, 1/2]} 0 \, d\omega + \int_{[1/2, 1]} \omega^2 \, d\omega = 0 + [\omega^3/3]_{1/2}^1 = 7/24, \text{ d'où } \text{var}(Z) = 7/24 - 9/64 = 29/192 \simeq 0.151.$$

□

2. (\*) Sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive  $X$  de fonction de répartition  $F_X$ . Déterminer dans les 2 cas suivants l'espérance et la variance de  $X$ :

$$F_X(t) = \frac{1}{2} (e^t \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(t) + (2 - e^{-t}) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(t));$$

$$F_X(t) = \frac{1}{4} (t + 2) \mathbb{I}_{[-1, 0[ \cup [1, 2[}(t) + \frac{3}{4} \mathbb{I}_{[0, 1]}(t) + \mathbb{I}_{[2, \infty[}(t).$$

*Proof.* Dans le premier cas, la fonction de répartition est continue et dérivable sur  $\mathbf{R}^*$ : la v.a. est donc continue et sa densité est  $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$  pour  $x \in \mathbf{R}$ : loi de Laplace. On alors  $\mathbb{E}[X] = 0$  et  $\text{var}(X) = 2$ .

Dans le second cas, il y a 2 sauts: en  $-1$  avec un saut de hauteur de  $1/4$  et en  $0$  avec un saut de hauteur  $1/4$ . La mesure de probabilité de  $X$  peut donc s'écrire:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{1}{4} (\delta_{\{-1\}}(B) + \delta_{\{0\}}(B)) + \frac{1}{4} \int_B \mathbb{I}_{[-1, 0[ \cup [1, 2[}(t) \, dt \quad \text{pour } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

$$\text{D'où } \mathbb{E}[X] = \frac{1}{4} (-1 + 0 - 1/2 + 3/2) = 0 \text{ et } \text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4} (1 + 0 + \int_{-1}^0 t^2 dt + \int_1^2 t^2 dt) = \frac{1}{4} (1 + \frac{8}{3}) = \frac{11}{12}. \quad \square$$

3. (\*) Soit une variable aléatoire  $X$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On suppose que loi de  $X$  est symétrique, c'est-à-dire que la loi de  $X$  est la même que celle de  $-X$ .

- (a) Montrer que  $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$  et  $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$ . Conclusion?
- (b) Montrer que si  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$  alors  $\mathbb{E}(X) = 0$ .

*Proof.* (a) On a d'après la formule des probabilités totales  $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) = 1$ . De plus  $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(-X < 0) = \mathbb{P}(X < 0)$  puisque  $X$  et  $-X$  ont même loi, donc même fonction de répartition. D'où  $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 2\mathbb{P}(X < 0)$ . Par suite,  $2\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$ , d'où  $\mathbb{P}(X > 0) \leq 1/2$ . Or, la formule des probabilités totales donne également  $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - \mathbb{P}(X > 0)$  et ainsi  $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$ .  $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$  en découle également.

- (b) On va traiter les 2 cas de v.a. Si  $X$  est une v.a. discrète à valeurs dans  $I = (x_j)_{j \in J}$ . Comme  $X$  et  $-X$  ont même loi, forcément quand  $x_j \in I$ , alors  $-x_j \in I$  et  $\mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}(X = -x_j)$ . Or  $\mathbb{E}(X) = \sum_{j \in J} x_j \mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{j \in J, x_j > 0} x_j \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_{j \in J, x_j < 0} x_j \mathbb{P}(X = x_j) + 0 * \mathbb{P}(X = 0)$ . En conséquence

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J, x_j > 0} (x_j \mathbb{P}(X = x_j) - x_j \mathbb{P}(X = -x_j)) = 0.$$

Pour une v.a. continue,  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(-X < -x) = 1 - F_X(-x)$  car la variable est continue. Donc en tout  $x$  où  $F_X$  est dérivable,  $F'_X(x) = 0 - (F_X(-x))' = F'_X(-x)$ , d'où  $f_X(x) = f_X(-x)$ : la densité est une fonction paire. Donc  $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = 0$  car la fonction  $x \rightarrow x f_X(x)$  est impaire.  $\square$

4. (\*\*\*) Sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive  $X$  de fonction de répartition  $F_X$ . Montrer, en utilisant Fubini, que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^{\infty} n t^{n-1} (1 - F_X(t)) dt = \int_0^{\infty} n t^{n-1} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

Montrer que l'hypothèse  $X$  positive est nécessaire.

*Proof.* Du fait que les fonctions intervenant dans l'intégrale sont mesurables positives, on peut écrire avec Fubini, quitte à obtenir  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} n t^{n-1} \mathbb{P}(X > t) dt &= \int_0^{\infty} n t^{n-1} \int_{]t, \infty[} d\mathbb{P}_X(x) dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{]t, \infty[} n t^{n-1} d\mathbb{P}_X(x) dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{]0, x[} n t^{n-1} dt d\mathbb{P}_X(x) \quad \text{en réécrivant le domaine d'intégration} \\ &= \int_0^{\infty} x^n d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}[X^n]. \end{aligned}$$

Si  $n = 1$  et  $X$  peut être négative, alors on peut avoir  $\mathbb{E}[X] < 0$  ce qui n'est pas possible avec une telle formule.  $\square$

5. (\*\*\*) Soit  $X$  une v.a. réelle normale centrée réduite. Soit la v.a.  $Y = e^X$ . On dit que  $Y$  suit une loi log-normale.

- (a) Montrer que  $Y$  à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\ln^2(y)/2}$  si  $z > 0$  et 0 sinon.
- (b) Pour  $a \in [-1, 1]$ , soit  $Y_a$  la v.a. de densité  $f_a(y) = f_Y(y)(1 + a \sin(2\pi \ln(y)))$  pour  $y > 0$  et 0 sinon. Montrer que  $f_a$  est bien une densité de probabilité.
- (c) Montrer que  $Y$  et  $Y_a$  ont mêmes moments, et en déduire que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité continue.

*Proof.* (a) Il est clair que  $Y : \Omega \rightarrow ]0, \infty[$  et  $Y$  v.a. car  $x \in \mathbf{R} \mapsto e^x$  est une fonction continue donc mesurable (borélienne). Donc pour  $y \leq 0$ ,  $F_Y(y) = 0$ . Et pour  $y > 0$ ,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln(y)} e^{-t^2/2} dt.$$

Il est clair que pour tout  $y > 0$  cette fonction est dérivable (donc continue) et sa limite en  $0^+$  est 0:  $F_Y$  est continue sur  $\mathbf{R}$  et dérivable partout sauf en 0, donc  $Y$  est une v.a. continue.

Sa dérivée, donc sa densité, sur  $] - \infty, 0[$  est 0 et pour  $y > 0$ ,

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial} (F_X(\ln(y)) - F_X(-\infty)) = \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\ln^2(y)/2}.$$

- (b) Pour tout  $a \in [-1, 1]$ , il est clair que  $f_a(y)$  est mesurable positive, et son intégrale existe car  $f_a \leq (1 + |a|)f_Y$ . De plus,

$$\int_0^{\infty} f_a(y) dy = \int_0^{\infty} f_Y(y) dy + a \int_0^{\infty} f_Y(y) \sin(2\pi \ln(y)) dy = 1 + a \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_Y(e^x) \sin(2\pi x) dx.$$

Mais  $e^x f_Y(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  fonction paire sur  $\mathbf{R}$ , donc  $e^x f_Y(e^x) \sin(2\pi x)$  est une fonction impaire intégrable, donc son intégrale sur  $\mathbf{R}$  est nulle. On en déduit que  $\int_0^{\infty} f_a(y) dy = 1$  pour tout  $a \in [-1, 1]$ .

(c) Si on calcule  $\mathbb{E}[Y_a^n]$  (qui existe car  $\mathbb{E}[Y^n]$  existe) alors:

$$\int_0^\infty y^n f_a(y) dy = \int_0^\infty y^n f_Y(y) dy + a \int_0^\infty y^n f_Y(y) \sin(2\pi \ln(y)) dy = \mathbb{E}[Y^n] + a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{(n-1)x} e^{-x^2/2} \sin(2\pi x) dx.$$

Mais  $e^{(n-1)x-x^2/2} = e^{-(n-1)^2/2} e^{-(x-(n-1))^2/2}$ . Par changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{(n-1)x} e^{-x^2/2} \sin(2\pi x) dx &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-(n-1))^2/2} \sin(2\pi x) dx \\ &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2} \sin(2\pi(z+(n-1))) dz = e^{-(n-1)^2/2} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2} \sin(2\pi z) dz = 0, \end{aligned}$$

par parité. Donc  $\mathbb{E}[Y_a^n] = \mathbb{E}[Y^n]$  pour tout  $n \geq 0$  et tout  $a \in [-1, 1]$ : les moments ne caractérisent pas la loi, puisque clairement  $Y_a$  et  $Y$  n'ont pas la même loi si  $a \neq 0$ .

□

6. (\*) Soit  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$  loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Quelle est la loi de  $Y = [X + 1]$  (partie entière de  $X + 1$ )

*Proof.*  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbf{N}^*$  et  $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k - 1)$ , donc  $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$ . Ainsi  $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1}$  pour  $k \geq 1$ :  $Y \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$ : loi géométrique. □

7. (\*\*\*) Soit  $U$  une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$ . Soit  $X$  une variable de fonction de répartition  $F_X$  que l'on supposera strictement croissante et dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

- Montrer  $F_X$  est une fonction admettant une application réciproque sur  $]0, 1[$ , notée  $F_X^{-1}$ .
- Démontrer que la loi de la variable  $F_X^{-1}(U)$  est la même que celle de  $X$ .
- A partir de la touche **RAND** d'une calculatrice, comment obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 3?
- Même question si  $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$ . Quelle est alors l'espérance de  $F_X^{-1}(U)$ ?

*Proof.* (a) Si  $F_X$  est strictement croissante et dérivable, donc continue, alors comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ , on en déduit que  $F_X : \mathbf{R} \rightarrow ]0, 1[$ . De plus, pour tout  $y \in ]0, 1[$ , s'il existe  $x < x'$  tel que  $F_X(x) = F_X(x') = y$  alors  $F_X$  ne serait pas strictement croissante:  $F_X$  est bien bijective, et admet une fonction réciproque  $F_X^{-1}$  sur  $]0, 1[$ .

- Comme  $F_X$  est dérivable et strictement croissante, sa dérivée ne s'annule pas, donc  $F_X^{-1}$  est dérivable et strictement croissante sur  $]0, 1[$ , donc continue:  $F_X^{-1}(U)$  est bien une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  qui prend ses valeurs dans  $\mathbf{R}$ . On a pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , en utilisant le fait que  $F_X(F_X^{-1}(U)) = U$  et  $F_X$  strictement croissante,

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x) \quad \text{car } F_U(u) = u \text{ pour tout } u \in [0, 1].$$

La v.a.  $F_X^{-1}(U)$  a donc même fonction de répartition que  $X$ , ces deux v.a. ont donc même loi.

- On sait que la touche **RAND** fournit une réalisation d'une v.a. uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour obtenir une réalisation d'une v.a. exponentielle de paramètre, il faudra donc calculer  $V = F_X^{-1}(U)$ . Or  $F_X(x) = 1 - e^{-3x}$ , d'où  $x = -\ln(1 - F_X(x))/3$  et on en déduit que  $V = -\ln(1 - U)/3$  (attention, la fonction  $F_X$  ici n'est pas stricto sensu strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ : il faut reprendre ce qui a été fait en a/ et en b/ en considérant cette fonction uniquement sur  $]0, \infty[$  où les hypothèses sont alors bien vérifiées).

- Si  $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$  alors  $x = \pi \tan(F_X(x) - 1/2)$  soit  $W = F_X^{-1}(U) = \pi \tan(U - 1/2)$ . La densité de  $X$  est  $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , c'est une v.a. qui suit une loi de Cauchy. On a alors  $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$ . Mais cette intégrale n'existe pas car:

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^\infty \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} [\ln(1+x^2)]_0^\infty = +\infty.$$

□

8. (\*) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ . De même pour celle d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . En déduire que la somme de 2 v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est une loi de Poisson. En est-il de même pour la loi géométrique?

*Proof.* Si  $X$  v.a. de loi géométrique de paramètre  $p$  alors pour  $z \in [-1, 1]$ ,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p = pz \sum_{k=1}^{\infty} (z(1-p))^{k-1} = pz \sum_{k=0}^{\infty} (z(1-p))^k = \frac{pz}{1-(1-p)z}.$$

Si  $X$  v.a. de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  alors pour  $z \in [-1, 1]$ ,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{z\lambda} = e^{(z-1)\lambda}.$$

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , alors par indépendance

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[z^{X_1}] \mathbb{E}[z^{X_2}] = e^{(z-1)\lambda_1} e^{(z-1)\lambda_2} = e^{(z-1)(\lambda_1+\lambda_2)}$$

qui caractérise la loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

Par le même raisonnement, si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux v.a. indépendantes de lois géométriques de paramètres  $p_1$  et  $p_2$ ,

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \frac{p_1 z}{1-(1-p_1)z} \frac{p_2 z}{1-(1-p_2)z} = \frac{p_1 p_2 z^2}{(1-(1-p_1)z)(1-(1-p_2)z)}$$

qui ne peut clairement pas être simplifié pour faire apparaître la fonction génératrice d'une loi géométrique.  $\square$

9. (\*) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire : a/ gaussienne, b/ de Poisson, c/ exponentielle, d/ uniforme, e/ gamma, f/ binomiale. En déduire que la somme de 2 v.a. gaussiennes indépendantes est gaussienne.

*Proof.* a/ Pour  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , on peut toujours écrire que  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} m + \sigma Z$ , avec  $Z \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ . On a alors  $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iu(m+\sigma Z)}] = e^{i u m} \phi_Z(\sigma u)$ . Mais:

$$\phi_Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i u x - x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((x-iu)+u)^2} dx = e^{-u^2/2},$$

après changement de variable  $y = x - iu$ . D'où  $\phi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + i u m}$ .

b/ Si  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$ , alors pour  $u \in \mathbf{R}$ ,

$$\phi_X(u) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{i u k} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda e^{i u})^k = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i u}} = e^{\lambda(e^{i u} - 1)}.$$

c/ Si  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ , alors pour  $u \in \mathbf{R}$ ,

$$\phi_X(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x + i u x} dx = \left[ \frac{\lambda}{i u - \lambda} e^{(-\lambda + i u)x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{-i u + \lambda}.$$

d/ Si  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([a, b])$ , alors pour  $u \in \mathbf{R}^*$ ,

$$\phi_X(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{i u x} dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{\lambda}{i u} e^{i u x} \right]_a^b = \frac{1}{i(b-a)u} (\cos(ub) - \cos(ua) + i(\sin(ub) - \sin(ua))).$$

e/ Si  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$ , alors pour  $u \in \mathbf{R}$ ,

$$\phi_X(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x + i u x} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta - i u)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = (1 - i u/\beta)^{-\alpha},$$

avec le changement de variable  $y = (\beta - i u)x$ , soit  $dy = (\beta - i u)dx$ .

f/ Si  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, p)$ , alors pour  $u \in \mathbf{R}$ ,

$$\phi_X(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{i u k} = (1-p)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{p e^{i u}}{1-p} \right)^k = (1-p)^n \left( 1 + \frac{p e^{i u}}{1-p} \right)^n = (1 + p(e^{i u} - 1))^n,$$

en utilisant la formule du binôme. On aurait pu aussi retrouver ce résultat en considérant que la loi de  $X$  est celle de la somme de  $n$  variables de Bernoulli de paramètre  $p$  indépendantes, ce qui entraîne que la fonction caractéristique de  $X$  est celle d'une Bernoulli de paramètre  $p$  à la puissance  $n$ .

Si deux v.a.  $X$  et  $X'$  sont gaussiennes de lois  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et  $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$  sont indépendantes, alors  $\phi_{X+X'}(u) = \phi_X(u) \phi_{X'}(u)$  par l'indépendance, soit  $\phi_{X+X'}(u) = e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 + i u m - \frac{1}{2} \sigma'^2 u^2 + i u m'} = e^{-\frac{1}{2} (\sigma^2 + \sigma'^2) u^2 + i u (m+m')}$ , soit la loi  $\mathcal{N}(m+m', \sigma^2 + \sigma'^2)$ .  $\square$

10. (\*\*\*) En utilisant la formule d'inversion de la fonction caractéristique pour les v.a. continues, démontrer que la fonction de caractéristique d'une v.a. de Cauchy de densité  $f(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$  sur  $\mathbf{R}$  est  $\phi(u) = e^{-|u|}$ .

*Proof.* On part de la formule de la densité caractéristique  $\phi(u) = e^{-|u|}$ . Comme on sait que  $X$  est une variable "continue" et que cette fonction caractéristique est intégrable, on utilise la formule d'inversion:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(u) e^{-i u x} du \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Donc pour  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u| - i u x} du$ . On en déduit que:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{u - i u x} du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u - i u x} du = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{e^{u - i u x}}{1 - i x} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-u - i u x}}{-1 - i x} \right]_0^{\infty} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}.$$

Par unicité de la fonction caractéristique, on en déduit que celle-ci est bien celle d'une loi de Cauchy.  $\square$

11. (\*\*\*) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle intégrable telle que  $\mathbb{E}[X] \geq 0$ .

- (a) Montrer que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $X \leq \lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$ .  
 (b) On suppose que, de plus,  $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$ . Montrer que

$$\left( \mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}] \right)^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]).$$

- (c) Montrer que pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$  on a l'Inégalité de Paley-Zygmund:

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

*Proof.* (a) Si  $X > \lambda \mathbb{E}[X]$  alors le terme de droite vaut  $X$ , donc l'inégalité est vérifiée. Si  $X \leq \lambda \mathbb{E}[X]$ , alors  $\lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}} = \lambda \mathbb{E}[X]$ . Mais comme cela a lieu pour  $X \leq \lambda \mathbb{E}[X]$ , l'inégalité est bien vérifiée. Elle l'est donc dans tous les cas.

- (b) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}^2] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}] = \mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]).$$

- (c) Grâce à la première question,  $X - \lambda \mathbb{E}[X] \leq X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$ . En prenant l'espérance on obtient donc que  $(1 - \lambda) \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}]$ . Comme  $\mathbb{E}[X] \geq 0$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , alors  $(1 - \lambda) \mathbb{E}[X] \geq 0$ . Donc

$$(1 - \lambda)^2 (\mathbb{E}[X])^2 \leq \left( \mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}] \right)^2.$$

Le résultat final est alors obtenu grâce à celui de la deuxième question.  $\square$

## Feuille n° 2:

### Vecteurs aléatoires

1. (\*) Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$  dont la loi a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^2$ ,

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbb{I}_{\{x, y \geq 0\}}.$$

- (a) Vérifier que  $f_{(X,Y)}$  est bien une densité.  
 (b) Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

*Proof.* (a) En premier lieu,  $f_{(X,Y)}$  est borélienne positive. Ensuite, en utilisant Fubini (les fonctions sont positives):

$$\int_{\mathbf{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ -\frac{e^{-x(1+y^2)}}{1+y^2} \right]_0^\infty dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} dy = 1.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{(X,Y)}(x, y) dy = \frac{2e^{-x}}{\pi} \int_0^\infty e^{-xy^2} dy = \frac{2e^{-x}}{\pi\sqrt{2x}} \int_0^\infty e^{-z^2/2} dz = \frac{e^{-x}}{\pi\sqrt{2x}} \sqrt{2\pi} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \quad \text{si } x > 0 \\ &= 0 \quad \text{si } x \leq 0 \\ f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{(X,Y)}(x, y) dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+y^2} \quad \text{si } y \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } y < 0. \end{aligned}$$

Il est clair que les 2 variables ne sont pas indépendantes car  $f_X(x) f_Y(y) \neq f_{(X,Y)}(x, y)$ .

□

2. (\*) Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

- (a) Déterminer les fonctions de répartition des v.a.  $U = \min\{X_1, X_2\}$  et  $V = \max\{X_1, X_2\}$ , et en déduire les densités de probabilité de  $U$  et  $V$ .  
 (b) Calculer  $\text{cov}(U, V)$ . Les variables  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes?  
 (c) Que vaut  $\mathbb{E}[|X_1 - X_2|]$ ?

*Proof.* (a) On a  $F_V(v) = 0$  pour  $v \notin [0, 1]$ . Si  $v \in [0, 1]$ , alors  $F_V(v) = \mathbb{P}(X_1 \leq v \cap X_2 \leq v) = v^2$  par indépendance de  $X_1$  et  $X_2$ . Comme c'est une fonction continue sur  $\mathbf{R}$  et dérivable par morceaux, alors  $V$  admet une densité et  $f_V(v) = 2v \mathbb{I}_{v \in [0, 1]}$ .

De même,  $\mathbb{P}(U \leq u) = 1 - \mathbb{P}(U > u) = \mathbb{P}(X_1 > u \cap X_2 > u) = 1 - (1 - u)^2$  pour  $u \in [0, 1]$ . D'où  $f_U(u) = 2(1 - u) \mathbb{I}_{u \in [0, 1]}$ .

(b) On a  $\mathbb{E}[U] = 2 \int_0^1 u(1 - u) du = [u^2 - \frac{2}{3}u^3]_0^1 = \frac{1}{3}$  et  $\mathbb{E}[V] = 2 \int_0^1 v^2 dv = [\frac{2}{3}v^3]_0^1 = \frac{2}{3}$ . Et  $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{4}$  par indépendance. D'où  $\text{cov}(U, V) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$ .

Les variables ne sont pas indépendantes car  $\text{cov}(U, V) \neq 0$ .

(c) Il est clair que  $\mathbb{E}[|X_1 - X_2|] = \mathbb{E}[V - U] = \mathbb{E}[V] - \mathbb{E}[U] = \frac{1}{3}$ .

□

3. (\*\*\*) On considère  $X = (X_1, X_2)$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ . On suppose que  $X$  est absolument continue, c'est-à-dire que la mesure de probabilité de  $X$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_2$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

- (a) Montrer alors que la loi de  $X_1$  admet une densité  $f_1$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_1$  sur  $\mathbf{R}$ , que l'on exprimera en fonction de  $f$ .

(b) Calculer  $f_1$  et  $f_2$  pour  $f$  telle que :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1} & \text{si } x_1 \geq x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A-t-on  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$  pour  $\lambda_2$ -presque tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ? Quelle conclusion en tirer sur  $X_1$  et  $X_2$ ?

(c) On suppose maintenant que  $X = (X_1, X_1)$  où  $X_1$  est absolument continue par rapport à  $\lambda_1$ . Le vecteur aléatoire  $X$  est-il absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_2$  sur  $\mathbb{R}^2$ ?

*Proof.* (a) La fonction de répartition de  $X_1$  est, pour  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$F_{X_1}(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{x_1 \leq x} \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_{-\infty}^x \left( \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1,$$

par Fubini. Donc  $F_{X_1}(x)$  s'écrit sous la forme  $\int_{-\infty}^x f_1(x_1) dx_1$  avec  $f_1(x_1) = \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2) dx_2$ . Comme  $f$  est borélienne positive,  $f_1$  l'est également. Donc la loi de  $X_1$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$ , et sa densité est  $f_1$ .

(b) On a:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_0^{x_1} e^{-x_1} dx_2 \mathbb{I}_{x_1 \geq 0} = x_1 e^{-x_1} \mathbb{I}_{x_1 \geq 0} \quad \text{loi } \Gamma(2, 1) \\ f_2(x_2) &= \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1} dx_1 \mathbb{I}_{x_2 \geq 0} = e^{-x_2} \mathbb{I}_{x_2 \geq 0} \quad \text{loi } \mathcal{E}(1) \end{aligned}$$

Il est clair que  $f(x_1, x_2) \neq f_1(x_1) f_2(x_2)$ , donc les variables  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

(c) On a  $X \in D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y = x\}$  bissectrice du plan. Donc l'ensemble des valeurs prises par  $X$  est un ensemble  $D$  de  $\mathbf{R}^2$  de mesure de Lebesgue  $\lambda_2(D) = 0$ : le vecteur aléatoire  $X$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , mais il l'est par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $D$ . □

4. (\*\*\*) Soit  $L$  une v.a. positive admettant une densité de probabilité  $f$  et  $X$  une v.a. de loi uniforme sur  $[0, 1]$  indépendante de  $L$ . On définit deux v.a.  $L_1$  et  $L_2$  par  $L_1 = XL$  et  $L_2 = (1 - X)L$  (cela représente par exemple la rupture aléatoire en 2 morceaux de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  d'une certaine molécule de longueur initiale (aléatoire)  $L$ ).

(a) Déterminer la loi du couple  $(L_1, L_2)$ , ainsi que les lois marginales de  $L_1$  et  $L_2$ .

(b) Que peut-on dire du couple  $(L_1, L_2)$  lorsque  $f(y) = \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(y) \lambda^2 y e^{-\lambda y}$  ( $\lambda > 0$ )?

(c) Déterminer la loi de  $Z = \min\{L_1, L_2\}$ .

*Proof.* (a) Soit  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$  mesurable. Alors

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \mathbb{E}[g(XL, (1 - X)L)] = \mathbb{E}[h(X, L)],$$

où  $h(x, \ell) = g(x\ell, (1 - x)\ell)$ .

Le but est de trouver une formule du type

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \int_{\mathbf{R}^2} g(x_1, x_2) f_{(L_1, L_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Si on prend  $g = \mathbb{I}_C$  avec  $C \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ , cela nous fournira une densité du couple  $(L_1, L_2)$ . Ou, si par exemple,  $g(l_1, l_2) = \mathbb{I}_{] - \infty, x]}(l_1) \mathbb{I}_{] - \infty, y]}(l_2)$ , on trouvera que

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \mathbb{P}(L_1 \leq x, L_2 \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(L_1, L_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Le but de ce qui suit est de trouver une formule explicite pour  $f_{(L_1, L_2)}$ . On travaille avec une fonction  $g$  arbitraire (c'est juste plus simple à écrire.)

Par théorème de transfert appliqué au couple  $(X, L)$ ,

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \mathbb{E}[h(X, L)] = \int_{\mathbf{R}^2} h(x, \ell) \mathbb{P}_{(X, L)}(dx, d\ell).$$

Par indépendance de  $X$  et  $L$ ,

$$\mathbb{P}_{(X, L)}(dx, d\ell) = \mathbb{P}_X(dx) \otimes \mathbb{P}_L(d\ell) = \mathbb{I}_{[0, 1]}(x) f(\ell) dx d\ell.$$

Donc,

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \int_{\mathbf{R}_+} f(\ell) \left( \int_0^1 h(x, \ell) dx \right) d\ell = \int_{\mathbf{R}_+} f(\ell) \int_0^1 g(x\ell, (1-x)\ell) dx d\ell.$$

Soit le changement de variables  $x_1 = x\ell, x_2 = (1-x)\ell$ . Alors

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x, \ell)} = \begin{pmatrix} \ell & x \\ -\ell & 1-x \end{pmatrix},$$

avec  $\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x, \ell)} = \ell = x_1 + x_2$ . Par conséquent,

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \int_{\mathbf{R}_+^2} g(x_1, x_2) \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} dx_1 dx_2.$$

La densité commune de  $(L_1, L_2)$  est donc

$$f_{(L_1, L_2)}(x_1, x_2) = \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \mathbb{I}_{x_1, x_2 \geq 0}.$$

Lois marginales : puisque  $X \sim 1 - X$ , clairement,  $L_1 \sim L_2$  : les deux coordonnées suivent la même loi. Soit maintenant  $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  une fonction test mesurable.

$$\mathbb{E}[g(L_1)] = \int_{\mathbf{R}_+} \left( \int_0^1 g(\ell x) dx \right) f(\ell) d\ell.$$

Changement de variables :  $\ell x = y$ , avec  $\ell$  fixé, donc  $\ell dx = dy, dx = \frac{1}{\ell} dy$ . Cela donne

$$\mathbb{E}[g(L_1)] = \int_{\mathbf{R}_+} f(\ell) \left( \frac{1}{\ell} \int_0^\ell g(y) dy \right) d\ell = \int_0^\infty g(y) \left( \int_y^\infty \frac{f(\ell)}{\ell} d\ell \right) dy,$$

où on a utilisé Fubini.  $L_1$  possède donc la densité

$$f_{L_1}(y) = \int_y^\infty \frac{f(\ell)}{\ell} d\ell, y > 0.$$

(b) Si  $f(y) = \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(y) \lambda^2 y e^{-\lambda y}$ , nous avons

$$f(\ell)/\ell = \lambda^2 e^{-\lambda \ell},$$

et

$$\int_y^\infty \frac{f(\ell)}{\ell} d\ell = \lambda e^{-\lambda y} :$$

$L_1$  et  $L_2$  suivent donc une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

(c)  $\min(L_1, L_2) = \min(X, 1 - X) L$ . Donc, avec  $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  une fonction test mesurable,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(Z)] &= \int_0^\infty f(\ell) \left( \int_0^1 g(\min(u, 1-u)\ell) du \right) d\ell \\ &= \int_0^\infty f(\ell) \left( \int_0^{\frac{1}{2}} g(\ell u) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(\ell(1-u)) du \right) d\ell. \end{aligned}$$

On fait un changement de variables dans la deuxième expression:  $1-u = v$ , donc  $v \in [0, \frac{1}{2}]$  et

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 g(\ell(1-u)) du = \int_0^{\frac{1}{2}} g(\ell v) dv.$$

On reconnaît la première expression... Donc, en posant  $y = \ell u$ , avec  $\ell$  fixé,  $dy = \ell du$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(Z)] &= 2 \int_0^\infty f(\ell) \left( \int_0^{\frac{1}{2}} g(\ell u) du \right) d\ell = 2 \int_0^\infty \frac{f(\ell)}{\ell} \left( \int_0^{\ell/2} g(y) dy \right) d\ell \\ &= 2 \int_0^\infty g(y) \left( \int_{2y}^\infty \frac{f(\ell)}{\ell} d\ell \right) dy. \end{aligned}$$

On conclut que pour  $y > 0$ ,

$$f_Z(y) = 2 \int_{2y}^\infty \frac{f(\ell)}{\ell} d\ell.$$

□

5. (\*\*) On considère un couple indépendant de v.a.  $(X, Y)$ . On suppose que  $X$  admet une densité  $f$  et que  $Y$  est une variable discrète qui prend ses valeurs dans  $\{y_n, n \in I\}$ ,  $I \subseteq \mathbf{N}$  où  $(y_n)_{n \in I} \subset \mathbb{R}$ . Montrer que  $Z = X + Y$  possède une densité  $f_Z$  et donner sa formule.

*Proof.* Puisque  $Z = X + y_n$  sur  $\{Y = y_n\}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq z) &= \sum_{n \in I} \mathbb{P}(Y = y_n, X \leq z - y_n) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(Y = y_n) \mathbb{P}(X \leq z - y_n) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(Y = y_n) F_X(z - y_n) \\ &= \sum_{n \in I} \mathbb{P}(Y = y_n) \int_{-\infty}^{z - y_n} f(x) dx = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(Y = y_n) \int_{-\infty}^z f(u - y_n) du \\ &= \int_{-\infty}^z \left( \sum_{n \in I} \mathbb{P}(Y = y_n) f(u - y_n) \right) du, \end{aligned}$$

avec le changement de variables  $u = x + y_n$  et puis Fubini. Donc, la densité de  $Z$  est donnée par

$$f_Z(z) = \sum_{n \in I} P(Y = y_n) f(z - y_n).$$

□

6. (\*\*\*) Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de  $n$  v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Montrer que  $\mathbb{P}(\exists(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j, X_i = X_j) = 0$ .

(b) On pose  $Z = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ . Déterminer la loi de  $Z$ .

(c) Soit  $N = \min\{1 \leq i \leq n, X_i = Z\}$ . Montrer que  $N$  est une v.a. et établir que  $\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \frac{e^{-nt}}{n}$  pour  $k = 1, \dots, n$  et  $t > 0$ . En déduire que  $Z$  et  $N$  sont des v.a. indépendantes et préciser la loi de  $N$ .

*Proof.* (a)  $\mathbb{P}(\exists(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j, X_i = X_j) = \int_D f(x)f(y) d\lambda_2(x, y)$ , où  $D$  est la première bissectrice, soit  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x = y\}$ . Comme  $\lambda_2(D) = 0$  alors  $\int_D f(x)f(y) d\lambda_2(x, y) = 0$ .

(b)  $Z$  prend ses valeurs dans  $[0, \infty[$ . Pour  $z < 0$ ,  $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = 0$ . Pour  $z \geq 0$ ,

$$F_Z(z) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > z \cap \dots \cap X_n > z) = 1 - \left( \int_z^\infty e^{-x} dx \right)^n = 1 - e^{-nz}.$$

En conséquence,  $Z$  suit une loi exponentielle de paramètre  $n$ .

(c) Si  $N = \min\{1 \leq i \leq n, X_i = Z\}$ , cela signifie que  $N$  est le plus petit indice pour lequel  $X_i$  atteint son minimum. Mais les applications  $X_i$  et  $Z$  sont mesurables, donc les applications  $Y_i = i \mathbb{I}_{X_i=Z} + n \mathbb{I}_{X_i \neq Z}$  également, d'où l'application  $\min_{1 \leq i \leq n} (Y_i)$  également. Donc  $N$  est une variable aléatoire.

Deux preuves possibles:

- Par la formule des probabilités totales:  $\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(N = j, Z > t) = \mathbb{P}(Z > t)$ . Mais par le fait que les v.a.  $(X_i)$  sont i.i.d., alors  $\mathbb{P}(N = j, Z > t) = \mathbb{P}(N = k, Z > t)$  pour tout  $j$ . D'où  $n \mathbb{P}(N = k, Z > t) = \mathbb{P}(Z > t)$ , d'où le résultat.
- $\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \mathbb{P}(\min_{i \neq k} X_i \geq X_k, X_k > t)$ . Comme  $X_k$  et  $\min_{i \neq k} X_i$  sont indépendants, et comme  $\mathbb{P}(\min_{i \neq k} X_i > x_k) = e^{-(n-1)x_k}$  pour  $x_k > 0$ , on en déduit que:

$$\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \int_t^\infty e^{-x_k} e^{-(n-1)x_k} dx_k = \frac{e^{-nt}}{n}.$$

De ceci, on en déduit que  $\mathbb{P}(N = k | Z > t) = \mathbb{P}(N = k \cap Z > t) / \mathbb{P}(Z > t) = \frac{1}{n}$  et ceci pour tout  $k = 1, \dots, n$  et tout  $t > 0$ : les deux variables sont indépendantes.

Et  $\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \frac{1}{n} e^{-nt}$  pour tout  $k$ :  $N$  suit une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ .

□

7. (\*\*\*) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.i.i.d., uniformes sur  $[0, 1]$ ,

(a) On pose  $W_i = -\log(X_i)$ . Montrer que  $W_i$  suit une loi exponentielle de paramètre 1.

(b) On rappelle qu'une loi Gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$  de paramètres  $(p, \alpha)$  avec  $\alpha, \beta > 0$  est une loi continue de densité sur  $\mathbf{R}$ :

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{I}_{x>0}$$

Soient  $U, V$  indépendants telles que  $U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha_1, \beta)$  et  $V \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha_2, \beta)$ . Quelle est la loi de  $U + V$ ?

(c) En déduire la loi de  $W_1 + \dots + W_n$ .

(d) Utiliser le résultat précédent pour trouver la loi de  $\prod_{i=1}^n X_i$ .

*Proof.* (a)  $\mathbb{P}(W_i > x) = \mathbb{P}(-\log(X_i) > x) = \mathbb{P}(\log(X_i) < -x) = \mathbb{P}(X_i < e^{-x}) = \mathbb{P}(X_i \leq e^{-x})$ , car  $X_i$  possède une densité. Enfin,  $\mathbb{P}(X_i \leq e^{-x}) = e^{-x}$ , par définition de la loi uniforme. Donc  $\mathbb{P}(W_i \leq x) = 1 - e^{-x}$ : on reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

(b) On montre en utilisant la fonction caractéristique que la somme de deux v.a. indépendantes  $Z_1$  et  $Z_2$  de lois  $\Gamma(\alpha_1, \beta)$  et  $\Gamma(\alpha_2, \beta)$ , respectives, suit encore une loi Gamma:  $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$ . En effet, la fonction caractéristique d'une loi  $\Gamma(\alpha, \beta)$  est  $\phi(u) = (1 - i \frac{u}{\beta})^{-\alpha}$ . D'où  $\phi_{Z_1+Z_2}(u) = \phi_{Z_1}(u) \phi_{Z_2}(u) = (1 - i \frac{u}{\beta})^{-\alpha_1} (1 - i \frac{u}{\beta})^{-\alpha_2} = (1 - i \frac{u}{\beta})^{-\alpha_1 - \alpha_2}$  en utilisant l'indépendance entre  $Z_1$  et  $Z_2$ .

(c) Puisque la loi exponentielle de paramètre  $\beta$  est une  $\Gamma(1, \beta)$ , nous avons donc que  $W_1 \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(1, 1)$  et donc  $W_1 + W_2 + \dots + W_n \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(n, 1)$ .

(d) Soit  $Y = W_1 + W_2 + \dots + W_n \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(n, 1)$ . Donc, pour  $x \in (0, 1)$ ,

$$\mathbb{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n \leq x) = \mathbb{P}(e^{-Y} \leq x) = \mathbb{P}(-Y \leq \log x) = \mathbb{P}(Y \geq -\log x) = 1 - F_Y(-\log x),$$

avec  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$ . La densité de  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$  est donc donnée par

$$\frac{1}{x} f_{(n,1)}(-\log x) \mathbb{I}_{x \in (0,1)},$$

avec  $f_{(n,1)}$  la densité de la loi  $\Gamma(n, 1)$ . □

8. (\*\*) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . On pose  $S = \min(X, Y)$  et  $T = |X - Y|$ .

(a) Calculer  $\mathbb{P}(S > a, T > b, X > Y)$  et  $\mathbb{P}(S > a, T > b, X < Y)$ .

(b) En déduire  $\mathbb{P}(X < Y)$ , la loi de  $S$ , et la loi de  $T$ .

*Proof.* (a) Choisissons  $a$  et  $b$  des réels positifs (les autres cas ne sont pas informatifs). Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > a, T > b, X > Y) &= \mathbb{P}(Y > a, X - Y > b) = \int_a^\infty \beta e^{-\beta y} \int_{b+y}^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx dy \\ &= \int_a^\infty \beta e^{-\alpha(b+y) - \beta y} dy = \frac{\beta e^{-\alpha b - (\alpha + \beta)a}}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Par symétrie, } \mathbb{P}(S > a, T > b, X < Y) = \frac{\alpha e^{-\beta b - (\alpha + \beta)a}}{\alpha + \beta}.$$

(b) Il suffit de choisir  $a = b = 0$  pour en déduire  $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{\alpha e^{-\beta b - (\alpha + \beta)a}}{\alpha + \beta}$ .

Par ailleurs, on choisissant  $b = 0$ , on a

$$\mathbb{P}(S > a) = \mathbb{P}(S > a, X < Y) + \mathbb{P}(S > a, X > Y) = \frac{\beta e^{-(\alpha + \beta)a}}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha e^{-(\alpha + \beta)a}}{\alpha + \beta} = e^{-(\alpha + \beta)a}$$

donc  $S$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha + \beta$ .

Pour la loi de  $T$ , on fixe  $a = 0$  et

$$\mathbb{P}(T > b) = \mathbb{P}(T > b, X < Y) + \mathbb{P}(T > b, X > Y) = \frac{\beta e^{-\alpha b}}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha e^{-\beta b}}{\alpha + \beta} = \frac{\beta e^{-\alpha b} + \alpha e^{-\beta b}}{\alpha + \beta}.$$

On en déduit que la densité de  $T$  est  $\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} (e^{-\alpha x} + e^{-\beta x}) \mathbb{I}_{x \geq 0}$ . □

9. (\*\*) Soit  $(X_1, X_2, X_3)$  vecteur aléatoire centré de matrice de covariance

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Calculer la variance de  $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$ .

(b) En déduire que  $X_3$  est une combinaison linéaire de  $X_1$  et  $X_2$  p.s.

- (c) Plus généralement, pour un vecteur aléatoire  $Y$  de matrice de covariance  $\Gamma$ , donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\Gamma$  pour que l'une des composantes de  $Y$  soit une fonction affine des autres composantes de  $Y$  p.s.
- (d) Soit maintenant  $Z$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Supposons que  $Z$  admette une densité  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^d$ . Soit  $x \in \mathbf{R}^d$  un vecteur non-nul. Montrer qu'alors la v.a.  $U = {}^t x Z$  a une densité sur  $\mathbf{R}$ .
- (e) Si  $Y$  est un vecteur aléatoire de matrice de covariance non-inversible, peut-il avoir une densité?

*Proof.* (a) On a  $\text{var}(X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2) = \text{cov}((- \alpha_1, - \alpha_2, 1) X) = (- \alpha_1, - \alpha_2, 1) A {}^t(- \alpha_1, - \alpha_2, 1)$ , donc  $\text{var}(X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2) = 2 \alpha_1^2 + 5 \alpha_2^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 - 6 \alpha_1 - 12 \alpha_2 + 9$ .

- (b) On peut calculer le déterminant de la matrice  $A$ , et on montre que  $\det(A) = 0$ . Donc 0 est valeur propre. On peut alors déterminer le sous-espace propre associé à 0. Cela revient à résoudre le système:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 5y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}.$$

Le sous-espace, qui est de dimension 1 est donc généré par le vecteur  $(1, 1, -1)$ . On en déduit qu'en choisissant  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  alors  $\text{var}(X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2) = 0$ , soit  $X_3 = X_1 + X_2$  p.s.

- (c) Il est clair que cette CNS est "la matrice de covariance admet 0 comme valeur propre" (ou bien son déterminant est nul).
- (d) Comme  $x$  est un vecteur non nul, on peut alors considérer  $(f_2, \dots, f_d)$  famille orthonormée de  $d - 1$  vecteurs de  $\mathbf{R}^d$  telle que  $(\frac{x}{\|x\|}, f_2, \dots, f_d)$  soit une base orthonormale de  $\mathbf{R}^d$  (on a  $\|x\| > 0$  car  $x$  non nul). Ainsi, pour  $u \in \mathbf{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U \leq u) &= \int_{{}^t x z \leq u} f\left({}^t x z \frac{x}{\|x\|^2} + \sum_{j=2}^d \langle f_j, z \rangle f_j\right) d\lambda_d(z) = \int_{\|x\|z'_1 \leq u} f\left(z'_1 \frac{x}{\|x\|} + \sum_{j=2}^d z'_j f_j\right) dz'_1 \dots dz'_d \\ &= \int_{z'_1 \leq \frac{u}{\|x\|}} \left( \int_{\mathbf{R}^{d-1}} f\left(z'_1 \frac{x}{\|x\|} + \sum_{j=2}^d z'_j f_j\right) dz'_2 \dots dz'_d \right) dz'_1 \end{aligned}$$

après un changement de variable de déterminant = 1 (changement d'une base orthonormale à une autre base orthonormale) et en utilisant Fubini. si l'on note

$$f_x(z'_1) = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} f\left(z'_1 \frac{x}{\|x\|} + \sum_{j=2}^d z'_j f_j\right) dz'_2 \dots dz'_d$$

on a pu écrire  $F_U$  sous la forme  $\int_{-\infty}^{\frac{u}{\|x\|}} f_x(z'_1) dz'_1 = \int_{-\infty}^u \|x\| f_x(t/\|x\|) dt$ , où  $f_x$  est une fonction positive mesurable, donc  $U$  est une variable continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

- (e) On montre que  $Y$  a une densité sur le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^d$  constitué par la somme directe des sous-espaces propres des valeurs propres non nulles de la matrice de covariance.

□

Feuille n° 3:  
Vecteurs gaussiens

1. (\*) Soit  $X = (X_1, X_2, X_3)$  un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Quelle est la loi de  $X_3$  et celle de  $(X_1, X_2)$  et que peut-on dire de ces 2 vecteurs aléatoires?  
 (b) Déterminer la densité de la loi de  $(X_1, X_2, X_3)$ .  
 (c) Quelle est la loi de  $(X_1 - X_2, X_3 - X_1)$ ?

*Proof.* (a)  $X_3 = AX$  avec  $A = {}^t(0, 0, 1)$  est donc une variable gaussienne comme combinaison linéaire issue de  $X$  et  $\mathbb{E}[X_3] = A\mathbb{E}[X] = 0$ ,  $\text{var}(X_3) = A\text{cov}(X)A = 1$ . Donc  $X_3 \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ .

$(X_1, X_2) = BX$  avec  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Donc le vecteur  $(X_1, X_2)$  est gaussien de loi  $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ .

$(X_1, X_2)$  et  $X_3$  sont deux vecteurs issus du même vecteur gaussien. De plus, pour tous  $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\text{cov}(X_3, a_1X_1 + a_2X_2) = a_1\text{cov}(X_3, X_1) + a_2\text{cov}(X_3, X_2) = 0$  d'après la matrice de covariance. Donc  $(X_1, X_2)$  et  $X_3$  sont indépendants.

- (b) La densité de la loi de  $(X_1, X_2, X_3)$  est directement donnée par le cours:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3)\Gamma^{-1}{}^t(x_1, x_2, x_3)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{5}} \exp\left(-\frac{1}{10}(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} {}^t(x_1, x_2, x_3)\right) \end{aligned}$$

- (c)  $Z = (X_1 - X_2, X_3 - X_1) = BX$  avec  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $Z$  est gaussien. Son espérance est 0 et sa matrice de variance covariance est:

$$\text{cov}(Z) = B\text{cov}(X)B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

□

2. (\*\*\*) Soit  $X$  une v.a. réelle normale centrée réduite et soit  $Y$  une v.a. indépendante de  $X$ , à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  telle que  $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.5$ . On considère la v.a.  $Z = XY$ .

- (a) Déterminer la mesure de probabilité de  $Z$ .  
 (b) Déterminer  $\text{cov}(X, Z)$ . Les variables  $X$  et  $Z$  sont-elles indépendantes?  
 (c) Déterminer la mesure de probabilité de  $X + Z$ . En déduire que la somme de 2 variables gaussiennes non-corrélées peut ne pas être gaussienne.

*Proof.* (a) Pour tout  $z \in \mathbf{R}$ , on a  $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z \leq z \cap Y = 1) + \mathbb{P}(Z \leq z \cap Y = -1)$  par la formule des probabilités totales. D'où  $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z \leq z | Y = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Z \leq z | Y = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X \leq z) + \mathbb{P}(-X \leq z))$  car  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Or  $\mathbb{P}(-X \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z)$  car  $X$  a une loi symétrique, donc  $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z)$ :  $Z \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ .

- (b)  $\text{cov}(X, Z) = \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YX^2] = \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X^2] = 0$  car  $Y$  est indépendante de  $X$  et du fait que  $\mathbb{E}[Y] = 0$ .  
 $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes car  $\mathbb{P}(|X| < 1) > 0$ ,  $\mathbb{P}(|Z| > 1) > 0$  et  $\mathbb{P}(|X| < 1 \cap |Z| > 1) = 0$ , donc  $\mathbb{P}(|X| < 1 \cap |Z| > 1) \neq \mathbb{P}(|X| < 1)\mathbb{P}(|Z| > 1)$ .

- (c) On a  $X + Z = X + XY = X(1 + Y) = 2XU$ , où  $U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$  et  $U$  indépendante de  $X$ . Donc pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , alors  $\mathbb{P}(X + Z \in B) = \frac{1}{2}\delta_{\{0\} \in B} + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{2X}(B)$ , où  $\mathbb{P}_{2X}$  est une loi  $\mathcal{N}(0, 4)$ .  
 On a donc  $X$  et  $Z$  qui sont deux v.a. gaussiennes centrées réduites, non corrélées, mais telles que  $X$  et  $Z$  ne sont pas indépendantes et une combinaison linéaire de  $X$  et  $Z$ , telle que  $X + Z$ , ne sont pas gaussienne.

□

3. (\*) Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes de loi commune  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Déterminer la loi de  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ , celle de  $W = \frac{1}{2}(X - Y)^2$  et enfin celle de  $Z/\sqrt{W}$ .

*Proof.* Comme  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors le vecteur  $(X, Y)$  est gaussien (centré réduit). Comme  $Z$  et  $Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$  sont des combinaisons linéaires de  $(X, Y)$ , alors le vecteur  $(Z, Z')$  est gaussien.

Par ailleurs,  $\mathbb{E}[Z] =$

$\mathbb{E}[Z'] = 0$ ,  $\text{var}(Z) = \text{var}(Z') = 1$  et  $\text{cov}(Z, Z') = \frac{1}{2}(\text{var}(X^2) - \text{var}(Y^2)) = 0$ . Comme le vecteur  $(Z, Z')$  est gaussien, on en déduit que  $Z$  et  $Z'$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Comme  $Z' \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  et  $W = (Z')^2$  alors  $W \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \chi^2(1)$ .

Enfin, comme  $Z$  et  $W$  sont indépendantes,  $Z/\sqrt{W} \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} t(1)$ , loi de student à 1 degré de liberté.  $\square$

4. (\*\*) Soient  $X$  et  $Y$  des v.a. indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- Déterminer la loi du couple de  $(X + Y, X - Y)$ . Que remarque-t-on?
- Déterminer également la loi du couple  $(X/Y, Y)$  puis celle de la v.a.  $X/Y$ . Les v.a.  $X/Y$  et  $Y$  sont elles indépendantes?
- En déduire la densité de la loi de Student de degré 1.

*Proof.* (a) Voir l'exercice précédent  $(X + Y, X - Y) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$  et  $(X + Y)$  et  $X - Y$  indépendantes.

- (b) Le couple  $(X/Y, Y)$  prend ses valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ . De plus, les lois de  $X/Y$  et  $Y$  sont symétrique. Pour déterminer la densité du couple, considérons  $u \in \mathbf{R}$  et  $y < 0$  (le cas  $y \geq 0$  sera obtenu par symétrie). Alors:

$$\begin{aligned} F_{(X/Y, Y)}(u, y) &= \mathbb{P}(X/Y \leq u \cap Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq uY \cap Y \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^y f_X(y') \int_{uy'}^{\infty} f_X(x') dx' dy' \quad (\text{Fubini}) \\ &= \int_{-\infty}^y f_X(y') (1 - F_X(uy')) dy'. \end{aligned}$$

En considérant  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial u} F_{(X/Y, Y)}(u, y)$  on obtient donc que pour  $y < 0$  et  $u \in \mathbf{R}$ ,

$$f_{(X/Y, Y)}(u, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial u} F_{(X/Y, Y)}(u, y) = -y f_X(y) f_X(uy).$$

On en déduit que pour tout  $(u, y) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$f_{(X/Y, Y)}(u, y) = \frac{|y|}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2(1 + u^2)\right).$$

On peut alors facilement déduire la densité de  $X/Y$ :

$$f_{X/Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2(1 + u^2)\right) dy = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + u^2},$$

c'est-à-dire la densité d'une loi de Cauchy.

Les v.a.  $X/Y$  et  $Y$  ne sont donc pas indépendantes car le produit des densités est différent de la densité du couple.

- (c) La loi de Student de degré 1 est celle de  $X/\sqrt{Y^2}$ , puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et  $Y^2 \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \chi^2(1)$ . Mais  $\sqrt{Y^2} = |Y|$ , et par symétrie  $X/|Y| \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X/Y$ . La loi de Student de degré 1 est donc la loi de Cauchy.  $\square$

5. (\*\*) Soit  $X = (X_1, X_2)$  un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que  $\Gamma$  est bien une matrice de variance-covariance et déterminer ses valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés.
- Démontrer que  $\mathbb{E}[(2X_1 - X_2)^2] = 0$ . En déduire la densité de la loi de  $(X_1, X_2)$  par rapport à une mesure que l'on précisera.

(c) Généraliser à un vecteur gaussien quelconque dont la matrice de covariance est singulière.

*Proof.* (a) On a  $\Gamma$  symétrique,  $\text{Trace}(\Gamma) = 5 > 0$  et  $\det(\Gamma) = 0 \geq 0$ : la matrice  $\Gamma$  est bien celle d'une variance-covariance.

On déduit que 0 et 5 sont les 2 valeurs propres. Le sous-espace propre associé à 0 est  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x + 2y = 0\}$  donc engendré par le vecteur  $(2, -1)$ . Le sous-espace propre associé à 5 est  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, -4x + 2y = 0\}$  donc engendré par le vecteur  $(1, 2)$ .

(b) On a  $\mathbb{E}[(2X_1 - X_2)^2] = \text{var}(2X_1 - X_2) = 4\text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) - 4\text{cov}(X_1, X_2) = 4 + 4 - 8 = 0$ .

On a donc  $2X_1 = X_2$  p.s.

De ce qui précède on en déduit que le vecteur  $X$  prend uniquement ses valeurs sur la droite  $2x = y$ . Et sa mesure de probabilité sur cette droite est gaussienne et centrée:

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} d\lambda_{\{y=2x\}}(t)$$

La densité de  $(X_1, X_2)$  sur la droite  $y = 2x$  est la densité gaussienne centrée réduite.

(c) Si la matrice de covariance est singulière, alors 0 est valeur propre de multiplicité  $m_0 \geq 1$ . Or si  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_n(0, \Gamma)$ , alors comme  $\Gamma$  est symétrique, il existe une matrice  $Q$  orthogonale (telle que  $Q^t Q = I_n$ ),  $\Gamma = Q D^t Q$  avec  $D$  une matrice diagonale contenant les valeurs propres, et on supposera que les  $m_0$  premières valeurs sont des 0. On peut alors écrire que  $X = \Gamma^{1/2} Z$ , où  $Z \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, I_n)$ , donc  $X = Q D^{1/2} {}^t Q Z$ . Mais on a  $Z' = (Z'_1, \dots, Z'_n) = {}^t Q Z \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, I_n)$ , d'où  $D^{1/2} {}^t Q Z = D^{1/2} Z' = (0, \dots, 0, \lambda_1 Z'_{m_0+1}, \dots, \lambda_p Z'_n)$ , où les  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les autres valeurs propres que 0. Donc  $X$  ne dépend que des  $Z'_{m_0+1}, \dots, Z'_n$ ,  $X$  est donc un vecteur gaussien appartenant uniquement à  $E_0^\perp$  (orthogonal du sev propre associé à 0) de dimension  $n - m_0$ . □

6. (\*\*\*) Soit  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$  un vecteur gaussien centré de matrice de covariance  $\Gamma$ .

(a) Démontrer que  $\mathbb{E}[e^{\langle s, X \rangle}] = e^{\frac{1}{2} {}^t s \Gamma s}$  pour tout  $s \in \mathbf{R}^4$ . En utilisant l'unicité du développement en série entière, en déduire que  $\mathbb{E}[\langle s, X \rangle^4] = 3 ({}^t s \Gamma s)^2$ . En déduire que

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3].$$

(b) Déduire également que  $\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3] = 0$ .

(c) Si  $(X, Y)$  est un vecteur gaussien d'espérance  $m$  et de matrice de variance-covariance  $\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ , en déduire  $\text{var}(X^2)$  et  $\text{cov}(X^2, Y^2)$ .

*Proof.* (a) On va utiliser la densité de  $X$ . Ainsi pour tout  $s \in \mathbf{R}^4$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\langle s, X \rangle}] &= \int_{\mathbf{R}^4} \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left({}^t s x - \frac{1}{2} {}^t x \Gamma^{-1} x\right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^4} \frac{1}{(2\pi)^2} \exp\left({}^t s \Gamma^{1/2} z - \frac{1}{2} {}^t z z\right) dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^4} \frac{1}{(2\pi)^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left({}^t (z - \Gamma^{1/2} s)(z - \Gamma^{1/2} s) - {}^t s \Gamma s\right)\right) dz \\ &= e^{\frac{1}{2} {}^t s \Gamma s} \int_{\mathbf{R}^4} \frac{1}{(2\pi)^2} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t z' z'\right) dz' \\ &= e^{\frac{1}{2} {}^t s \Gamma s}. \end{aligned}$$

On sait que  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Donc  $\mathbb{E}[e^{\langle s, X \rangle}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle s, X \rangle^k}{k!}\right]$  pour tout  $s \in \mathbf{R}^4$ . Par ailleurs, la série étant convergente et les moments  $\mathbb{E}[|\langle s, X \rangle|^k] < \infty$  étant tous finis (car  $\langle s, X \rangle$  est une variable gaussienne) alors pour tout  $s \in \mathbf{R}^4$ ,

$$\mathbb{E}[e^{\langle s, X \rangle}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[\langle s, X \rangle^k]}{k!}.$$

Mais on a également pour tout  $s \in \mathbf{R}^4$ ,

$$e^{\frac{1}{2} {}^t s \Gamma s} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{({}^t s \Gamma s)^j}{2^j j!}.$$

Par unicité du développement en série entière, il y a donc égalité des 2 développements et donc égalité des coefficients devant les différents moments en  $s$ . Pour le moment d'ordre 4, on en déduit donc que:

$$\frac{\mathbb{E}[\langle s, X \rangle^4]}{4!} = \frac{({}^t s \Gamma s)^2}{2^2 2!} \implies \mathbb{E}[\langle s, X \rangle^4] = 3 ({}^t s \Gamma s)^2 \quad \text{pour tout } s \in \mathbf{R}^4.$$

Si  $s = {}^t(s_1, s_2, s_3, s_4)$ , en développant  $\langle s, X \rangle^4 = (s_1 X_1 + s_2 X_2 + s_3 X_3 + s_4 X_4)^4$ , on obtient que le terme en  $s_1 s_2 s_3 s_4$  est  $6 X_1 X_2 X_3 X_4$ , donc celui de  $\mathbb{E}[\langle s, X \rangle^4]$  est  $6 \mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4]$ .

D'autre part,  ${}^t s \Gamma s = \sum_{i=1}^4 s_i^2 \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} s_i s_j \mathbb{E}[X_i X_j]$ , donc si l'on regarde le terme en  $s_1 s_2 s_3 s_4$  de  $({}^t s \Gamma s)^2$ , on obtient:

$$2 (\mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3])$$

Par conséquent, en égalisant les 2 termes en  $s_1 s_2 s_3 s_4$ , on obtient bien que:

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3].$$

- (b) Si l'on prend dans le développement précédent  $\mathbb{E}[\langle s, X \rangle^3]$ , l'égalité des développements en série entière montre que nécessairement  $\mathbb{E}[\langle s, X \rangle^3] = 0$ , donc par exemple  $\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3] = 0$ .
- (c) Commençons par le cas où  $m = {}^t(0, 0)$ . Alors  $\text{var}(X^2) = \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2 = 3\sigma_X^4 - \sigma_X^4 = 2\sigma_X^4$  d'après l'égalité précédente (en prenant  $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X$ ) et  $\text{cov}(X^2, Y^2) = \mathbb{E}[X^2 Y^2] - \sigma_X^2 \sigma_Y^2 = 2 \mathbb{E}[X Y] \mathbb{E}[X Y] = 2\sigma_{XY}^2$  (en prenant  $X = X_1 = X_2$  et  $Y = X_3 = X_4$ ).

Si  $(X, Y)$  est maintenant un vecteur gaussien d'espérance  $m = {}^t(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$ , on en déduit que

$$\text{var}(X^2) = 4 \mathbb{E}[X]^2 \sigma_X^2 + 2 \sigma_X^4 \quad \text{et} \quad \text{cov}(X^2, Y^2) = 4 \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y] \sigma_{XY} + 2 \sigma_{XY}^2.$$

□

## Feuille n° 4:

## Convergence et théorèmes limites

0. (\*) Soit  $X_0$  une v.a. définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on définit  $X_n = X_0/n$ . Démontrer que  $(X_n)$  converge en loi, en probabilité et presque-sûrement vers une limite que l'on précisera. Qu'en est-il pour la convergence dans  $\mathbb{L}^p$ ?

*Proof.* • Pour la convergence en loi, on commence par la caractérisation avec les fonctions de répartition. Ainsi pour  $x \in \mathbf{R}$ , on a:

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_0 \leq xn).$$

Quand  $x > 0$  alors  $xn \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_0 \leq xn) = 1$ .

Quand  $x < 0$  alors  $xn \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_0 \leq xn) = 0$ . Or il n'existe qu'une seule v.a. dont la fonction caractéristique vaut 0 sur  $]0, \infty[$  et 1 sur  $]0, \infty[$ , c'est celle de masse de Dirac en 0, donc presque sûrement la constante 0. Donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$  (on notera que la convergence n'a pas lieu pour  $x = 0$ , mais ce n'est pas grave puisque la fonction de répartition de 0 n'est pas continue en 0).

- On peut également obtenir la convergence en loi avec les fonctions caractéristiques. Ainsi on a pour tout  $u \in \mathbf{R}$ :

$$\phi_{X_n}(u) = \mathbb{E}[e^{iuX_n}] = \mathbb{E}[e^{iuX_0/n}] = \int_{\Omega} e^{iuX_0(\omega)/n} d\mathbb{P}(\omega).$$

Or pour tout  $\omega$  et tout  $u$ , on a  $e^{iuX_0(\omega)/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ . De plus pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\omega \in \Omega$  et  $u \in \mathbf{R}$ ,  $|e^{iuX_0(\omega)/n}| \leq 1$ , et  $\int_{\Omega} 1 d\mathbb{P} = 1 < \infty$ . On peut donc appliquer le Théorème de convergence dominée de Lebesgue et pour tout  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\phi_{X_n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ . Et comme 1 est la fonction caractéristique de la constante 0, par le théorème d'inversion on en déduit que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$ .

- On montre également la convergence en loi avec la caractérisation par les espérances. Soit  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , bornée et continue. Alors:

$$\mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X_0/n)] = \int_{\Omega} g(X_0(\omega)/n) d\mathbb{P}(\omega).$$

Or  $g$  est continue sur  $\mathbf{R}$ , donc comme pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X_0(\omega)/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $g(X_0(\omega)/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(0)$  par continuité en 0. Par ailleurs,  $g$  étant bornée, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $\omega \in \Omega$ ,  $|g(X_0(\omega)/n)| \leq \sup |g|$  et  $\int_{\Omega} \sup |g| d\mathbb{P} = \sup |g| < \infty$ . On peut donc appliquer le Théorème de convergence dominée de Lebesgue et pour tout  $g$  continue bornée,  $\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[g(0)] = g(0)$ . On en déduit que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$ .

- On va considérer la convergence en probabilité. On sait que  $X_n$  converge en loi vers 0. Or si  $(X_n)$  convergeait en probabilité vers une autre limite que 0, comme la convergence en probabilités entraîne la convergence en loi, il y aurait une contradiction. Donc si  $(X_n)$  converge en probabilité ce ne peut être que vers 0. Pour le démontrer, on pose  $\varepsilon > 0$  et on a

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_0| \geq \varepsilon n) = \mathbb{P}(X_0 \geq \varepsilon n) + \mathbb{P}(X_0 \leq -\varepsilon n).$$

On a  $\mathbb{P}(X_0 \leq -\varepsilon n) = F_{X_0}(-\varepsilon n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  car  $-\varepsilon n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ . De plus  $\mathbb{P}(X_0 \geq \varepsilon n) = 1 - \mathbb{P}(X_0 < \varepsilon n)$  et  $\mathbb{P}(X_0 < \varepsilon n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ . Donc on a bien  $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  et ainsi  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} 0$ .

Cependant, on aurait pu faire beaucoup plus simple puisque la convergence en loi vers une constante est équivalent à la convergence en probabilité vers une constante, donc ayant montré  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$  on avait directement  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} 0$ .

- La convergence presque sûre est souvent la plus difficile à démontrer. Dans cet exercice c'est la plus simple! En effet, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X_n(\omega) = X_0(\omega)/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ : il y a convergence "sûre" sur  $\Omega$  donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$ .

Si on avait initialement commencé par cette convergence, on avait directement la convergence en loi et probabilité, puisque la convergence presque sûre entraîne les 2 autres.

- Pour la convergence dans  $\mathbb{L}^p$  avec  $p > 0$ , celle-ci n'est possible que si  $X_0 \in \mathbb{L}^p$ , donc si  $\|X_0\|_p = (\mathbb{E}[|X_0|^p])^{1/p} < \infty$ .

Dans ce cas,  $\mathbb{E}[|X_n - 0|^p] = \frac{\mathbb{E}[|X_0|^p]}{n^p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}^p} 0$ .

Si  $X_0 \notin \mathbb{L}^p$ , alors  $(X_n)$  ne converge pas dans  $\mathbb{L}^p$ . Question? Peut-il exister une v.a.  $X_0$  qui n'appartiennent à aucun  $\mathbb{L}^p$  pour tout  $p > 0$ . Ceci est possible par exemple en considérant  $X_0$  une variable positive continue de densité  $f(x) = C(x \ln^2(x))^{-1}$  pour  $x \geq 2$ . On pourra trouver  $C$  car l'intégrale de  $f$  existe sur  $[2, \infty[$  (intégrale de Bertrand), mais en revanche  $\mathbb{E}[X_0^p] = C \int_2^{\infty} x^{p-1} \ln^{-2}(x) dx = \infty$  pour tout  $p > 0$ .

□

1. (\*) Soit  $(X_n)_n$  une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre  $\theta \in ]0, 1[$ .

(a) Montrer que  $X_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \theta$ . En déduire que  $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \theta(1 - \theta)$ .

(b) Montrer que  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta))$ .

(c) Montrer que  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$ .

(d) Déterminer la loi limite de  $\sqrt{n}(\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - \theta(1 - \theta))$  pour  $\theta \neq 1/2$ .

*Proof.* (a) En appliquant la loi des grands nombres dont les hypothèses sont respectées, comme  $\mathbb{E}[X_1] = \theta$ , alors  $X_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \theta$ .

Soit la fonction  $g(x) = x(1 - x)$  pour  $x \in \mathbf{R}$ , fonction continue sur  $\mathbf{R}$ : donc  $g(\bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} g(\theta)$ , soit le résultat.

(b) On applique le théorème de la limite centrale dont les hypothèses sont respectées et avec  $\text{var}(X_1)\theta(1 - \theta)$ , on obtient bien  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta))$ .

(c) D'après le résultat précédent,  $n^{1/4}(\bar{X}_n - \theta) = n^{-1/4}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$ . Comme cette limite en loi est vers une constante, cette limite est aussi en probabilité. On applique alors la fonction carré, qui est continue, et on obtient bien  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$  en probabilité.

(d) On applique la delta-méthode, avec la fonction  $g(x) = x(1 - x)$  pour  $x \in \mathbf{R}$ , et on obtient pour  $\theta \neq 1/2$ ,

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\theta)) = \sqrt{n}(\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - \theta(1 - \theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta)(1 - 2\theta)^2)$$

car  $g'(x) = 1 - 2x$  et  $g'(\theta) = 1 - 2\theta$ .

Pour  $\theta = 1/2$ , en allant plus loin dans le développement de Taylor

$$n(g(\bar{X}_n) - g(\theta)) \simeq \frac{1}{2}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta))^2 g''(\theta) \implies n\left(\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - \frac{1}{4}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} -\frac{1}{4}\chi^2(1).$$

□

2. (\*) Soit  $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite de v.a. telle que  $\mathbb{E}[X_k^2] < \infty$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$  et  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$  pour  $i \neq j$ . On suppose qu'il existe des réels  $m$  et  $C$  tels que pour tout  $k$ ,  $\mathbb{E}[X_k] = m$  et  $\text{var} X_k \leq C$ . Montrer que la suite des  $\bar{X}_n$  converge vers  $m$  dans  $\mathbb{L}^2$  et en probabilité.

*Proof.* On a  $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - m)^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \text{var}(X_i) \leq \frac{C}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . D'où la convergence de  $\bar{X}_n$  vers  $m$  dans  $\mathbb{L}^2$ . Et comme la convergence dans  $\mathbb{L}^2$  entraîne celle en probabilité, on a aussi  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} m$ .

□

3. (\*\*\*) Soit  $\Omega = [0, 1]$  et soit la suite  $(X_n)$  de v.a. définies sur  $(\Omega, \mathcal{B}([0, 1]), \mathbb{P})$  où  $\mathbb{P}$  est la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ :

$$X_n(\omega) = (n + 1)^2 \omega^n - (n + 1) \quad \text{pour tout } \omega \in [0, 1].$$

Que vaut  $\mathbb{E}[X_n]$ ? Démontrer pourtant que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} -\infty$ . La suite  $(X_n)$  converge-t-elle dans  $\mathbb{L}^2$ ?

*Proof.* On a  $\mathbb{E}[X_n] = \int_0^1 ((n + 1)^2 \omega^n - (n + 1)) d\omega = \left[ (n + 1) \omega^{n+1} \right]_0^1 - (n + 1) = 0$ .

Pour tout  $\omega \in [0, 1[$ ,  $(n + 1)^2 \omega^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  donc  $X_n(\omega) = -\infty$ . Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(|X_n + (n + 1)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0$ .

On en déduit donc que la variable  $X_n + (n + 1)$  tend en probabilité vers 0 donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} -\infty$ .

Si  $X_n$  converge en probabilité vers  $-\infty$ , alors la seule limite possible dans  $\mathbb{L}^2$  pour  $(X_n)$  est  $-\infty$ . Mais pour toute suite réelle  $(a_n)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n - a_n)^2] &= \mathbb{E}[X_n^2] - 2a_n \mathbb{E}[X_n] + a_n^2 \\ &= (n + 1)^2 \left( \frac{(n + 1)^2}{2n + 1} - 1 \right) + a_n^2 \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

Donc  $X_n$  ne tend pas vers  $-\infty$  dans  $\mathbb{L}^2$  et on s'aperçoit même que c'est pour  $a_n = 0$  que la distance  $\mathbb{L}^2$  entre  $X_n$  et  $a_n$  est la plus petite (mais pour autant  $X_n$  ne tend pas du tout vers 0 dans  $\mathbb{L}^2$ ).

□

4. (\*\*) On suppose  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} c$  pour une suite de v.a.  $(X_n)_n$  à valeurs réelles et  $c \in \mathbf{R}$ . Soit  $\phi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\phi(x) = \min(x, 1)$ .

(a) Soit  $\varepsilon > 0$ . En utilisant une caractérisation de la convergence en loi, quelle est la limite de  $\mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\varepsilon)]$  quand  $n \rightarrow \infty$ ?

(b) En déduire que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} c$ .

*Proof.* (a) La fonction  $\phi$  est continue et bornée. Comme  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} c$  alors  $|X_n - c|/\varepsilon \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$ , alors  $\mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\varepsilon)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[\phi(0)] = 0$ .

(b) Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\phi(|X_n - c|/\varepsilon) = 1$  pour  $|X_n - c| \geq \varepsilon$  et  $\phi(|X_n - c|/\varepsilon) = |X_n - c|/\varepsilon$  sinon. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\varepsilon)] &= \mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\varepsilon) \mathbb{I}_{|X_n - c| \geq \varepsilon}] + \mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\varepsilon) \mathbb{I}_{|X_n - c| < \varepsilon}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{|X_n - c| \geq \varepsilon}] + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{|x-c|}{\varepsilon} dF_{X_n}(x) \\ &= \mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{|x-c|}{\varepsilon} dF_{X_n}(x). \end{aligned}$$

Mais on peut écrire que

$$\begin{aligned} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{|x-c|}{\varepsilon} dF_{X_n}(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_c^{c+\varepsilon} (x-c) dF_{X_n}(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{c-\varepsilon}^c (c-x) dF_{X_n}(x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left( [(x-c)F_{X_n}(x)]_c^{c+\varepsilon} - \int_c^{c+\varepsilon} F_{X_n}(x) dx + [(c-x)F_{X_n}(x)]_{c-\varepsilon}^c + \int_{c-\varepsilon}^c F_{X_n}(x) dx \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon - (c+\varepsilon-c) + 0 + 0) = 0, \end{aligned}$$

car pour tout  $x > c$ ,  $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  et pour tout  $x < c$ ,  $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . En conséquence  $\mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\varepsilon)]$  et  $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon)$  on même limite, donc  $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , soit  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} c$ . □

5. (\*\*\*) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de v.a.i.i.d. telle que  $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ . Soit  $Y_k = \bar{X}_k$  pour  $k \geq 1$ . Peut-on obtenir la loi faible des grands nombres pour la suite  $(Y_k)$ ? La loi forte des grands nombres? Dans le cas particulier où les  $X_k$  suivent une loi normale centrée réduite déterminer un théorème de limite centrale.

*Proof.* On va supposer, sans perte de généralité  $\mathbb{E}[X_1] = 0$  puisque  $(Y_n)$  a la même espérance que  $(X_n)$  et on notera  $\sigma^2 = \text{var}(X_1)$ . On sait que  $\text{var}(Y_k) = \frac{\sigma^2}{k}$ . Par ailleurs,  $\text{cov}(Y_k, Y_\ell) = \frac{\sigma^2}{k}$  pour  $k \leq \ell$ . On en déduit que:

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k\right) &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=1}^n \text{var}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \text{cov}(Y_k, Y_\ell) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \left( 1 + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \left( 1 + 2 \sum_{1 \leq k < n} \frac{n-k}{k} \right) \\ &\simeq \frac{2\sigma^2 \ln(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit que  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$ .

Pour une suite numérique  $(u_n)$  convergeant vers une limite  $\ell$ , on sait que la somme de Cesaro  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$  converge vers  $\ell$ . Dans notre cas, considérons  $\Omega \setminus N$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que  $Y_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Et comme  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$ , on sait que  $\mathbb{P}(N) = 0$  (ensemble négligeable). Comme somme de Césaro, on a donc pour tout  $\omega \in \Omega \setminus N$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , ce qui implique:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Si  $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est un vecteur gaussien et  $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k\right)_n$  est une suite de v.a. gaussienne. On en déduit donc du calcul effectué plus haut que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k\right)\right) \implies \sqrt{\frac{n}{2 \ln(n)}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

□

6. (\*\*\*) Appliquer le théorème limite central à une suite de v.a.i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite

$$u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

*Proof.* On sait que si les  $X_k$  sont des v.a.i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1, alors  $\sum_{k=1}^n X_k$  suit une loi de Poisson de paramètre  $n$ . Donc

$$u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq n\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - 1 \leq 0\right).$$

Mais si on applique le TLC à  $(X_k)$  ce qui est possible puisque les  $X_k$  sont des v.a.i.i.d. de variance 1, alors:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - 1\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

De ceci on en déduit que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq 0) = 1/2$ .

□

7. (\*\*\*) Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.i.i.d. centrées de variance commune 1. Soit  $(a_{i,n})_{1 \leq i \leq n, n \in \mathbf{N}}$  une famille de réels telle que  $\sum_{i=1}^n a_{i,n}^2 = 1$  pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ . On va montrer que si  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_{i,n}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , alors la suite des  $(S_n)$  telle que  $S_n = \sum_{i=1}^n a_{i,n} X_i$  converge en loi vers la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- (a) Montrer que si  $(z_j)$  et  $(z'_j)$  sont deux familles de nombres complexes tels que  $|z_j| \leq 1$  et  $|z'_j| \leq 1$  pour tout  $j$ , alors

$$\left| \prod_{j=1}^n z_j - \prod_{j=1}^n z'_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j - z'_j|.$$

- (b) Déterminer la fonction caractéristique de  $S_n$ . En déduire sa limite en utilisant l'inégalité précédente.

*Proof.* (a) Par récurrence sur  $n$ , montrons que

$$\left| \prod_{j=1}^n z_j - \prod_{j=1}^n z'_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j - z'_j|.$$

En effet, la relation est clairement vraie pour  $n = 1$ . Si elle est vraie au rang  $n$  alors par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^{n+1} z_j - \prod_{j=1}^{n+1} z'_j \right| &= \left| z_{n+1} \prod_{j=1}^n z_j - z'_{n+1} \prod_{j=1}^n z'_j \right| \\ &\leq \left| (z_{n+1} - z'_{n+1}) \prod_{j=1}^n z_j \right| + \left| z'_{n+1} \left( \prod_{j=1}^n z_j - \prod_{j=1}^n z'_j \right) \right| \\ &\leq |z_{n+1} - z'_{n+1}| + \left| \prod_{j=1}^n z_j - \prod_{j=1}^n z'_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |z_j - z'_j|. \end{aligned}$$

La relation est donc vraie au rang  $n + 1$ .

- (b) Considérons la fonction caractéristique de  $S_n$  et montrons qu'elle converge vers celle d'une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Soit  $u \in \mathbf{R}$ . Alors  $\phi_{S_n}(u) = \mathbb{E}[e^{i u S_n}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{i u a_{k,n} X_k}]$  en utilisant l'indépendance des  $X_k$ . Comme par hypothèse  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_{i,n}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , alors pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on peut utiliser un développement de Taylor d'ordre 2 en 0 de chaque fonction caractéristique  $\phi_{X_k}(u a_{k,n}) = \mathbb{E}[e^{i u a_{k,n} X_k}]$  et on obtient avec les  $\varepsilon_{k,n}$  tels que  $\max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_{k,n}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,

$$\phi_{X_k}(u a_{k,n}) = \phi_{X_k}(0) + \phi'_{X_k}(0) u a_{k,n} + \frac{1}{2} \phi''_{X_k}(0) u^2 a_{k,n}^2 + o(u^2 a_{k,n}^2) = 1 - \frac{1}{2} u^2 a_{k,n}^2 + \varepsilon_{k,n} (u^2 a_{k,n}^2),$$

car  $\phi'_{X_k}(0) = i \mathbb{E}[X_k] = 0$  et  $\phi''_{X_k}(0) = -\mathbb{E}[X_k^2] = -1$ . En utilisant l'inégalité, comme pour  $n$  suffisamment grand  $\left|1 - \frac{1}{2} u^2 a_{k,n}^2\right| \leq 1$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  du fait que  $\max_{1 \leq k \leq n} |a_{k,n}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \left| \phi_{S_n}(u) - \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2} u^2 a_{k,n}^2\right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |\varepsilon_{k,n}| u^2 a_{k,n}^2 \\ &\leq u^2 \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_{k,n}| \sum_{k=1}^n a_{k,n}^2 \\ &\leq u^2 \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_{k,n}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Pour  $n$  suffisamment grand, on a avec le développement de Taylor de la fonction  $\log$  et  $\max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon'_{k,n}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,

$$\log \left( \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2} u^2 a_{k,n}^2\right) \right) = \sum_{k=1}^n \log \left(1 - \frac{1}{2} u^2 a_{k,n}^2\right) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} u^2 a_{k,n}^2 (1 + \varepsilon'_{k,n})\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{1}{2} u^2.$$

De ceci on en déduit que  $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2} u^2 a_{k,n}^2\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-u^2/2}$  et de même  $\phi_{S_n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-u^2/2}$  qui est la fonction caractéristique d'une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . □

8. (\*\*) Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.i.i.d. centrées de variance commune  $\sigma^2 > 0$ .

- Rappeler la limite en loi de  $S_n$  telle que  $S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$ .
- Décomposer la variable  $S_{2n}$  en fonction de  $S_n$  et d'une variable aléatoire  $S'_n$  indépendante de  $S_n$  et de même loi.
- En raisonnant par l'absurde, montrer que  $S_n$  ne converge pas en probabilité (on pourra montrer que si c'était le cas,  $S'_n$  convergerait aussi en probabilité et étudier sa limite).

*Proof.* (a) Le TLC peut pleinement s'appliquer et on a  $S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j = \sqrt{n} \frac{1}{\sigma} (\bar{X}_n - 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ .

(b) On a  $\frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^n X_j = \sqrt{n} S_n$ , donc  $\frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{2n} X_j = \sqrt{n} S_n + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=n+1}^{2n} X_j = \sqrt{2n} S_{2n}$ . On en déduit donc que  $S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_n + S'_n$  avec  $S'_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2n}} \sum_{j=n+1}^{2n} X_j$ . Il est clair que comme les  $X_i$  sont indépendantes, alors  $\frac{1}{\sqrt{2}} S_n$  et  $S'_n$  sont indépendantes. Et comme les  $X_i$  ont toutes même loi,  $\sum_{j=1}^n X_j \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \sum_{j=n+1}^{2n} X_j$ , donc  $\frac{1}{\sqrt{2}} S_n \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} S'_n$ .

(c) Comme  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ , il est clair que si  $S_n$  converge en probabilité, ce ne peut être que vers une variable aléatoire  $S_\infty$  qui suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Supposons que  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} S_\infty$ . Alors  $\frac{1}{\sqrt{2}} S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{2}} S_\infty$  et  $S_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} S_\infty$ . Or  $S'_n = \frac{1}{\sqrt{2}} S_n - S_{2n}$  donc  $S'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) S_\infty$ . Mais comme on a supposé que  $S_n$  convergeait en probabilité, on a aussi  $S'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{2}} S'_\infty$  où  $S'_\infty \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} S_\infty$  et  $S'_\infty$  indépendante de  $S'_\infty$ . Donc à moins que  $S_\infty = 0$ , ce qui n'est pas possible puisque la loi de  $S_\infty$  est  $\mathcal{N}(0, 1)$ , on ne peut pas avoir  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) S_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} S'_\infty$ , d'où l'impossibilité de converger en probabilité. □