Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. troisième année 2023 – 2024

Feuilles de TD, cours de L3 Statistique 2

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Variables aléatoires

1. **(*)** Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ la tribu borélienne sur Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $[0,1]$.

   (a) On pose X la variable aléatoire telle que $X(\omega) = 1-\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

   (b) Répondre aux mêmes questions pour $Y(\omega) = -\ln(\omega)$.

   (c) On pose $Z(\omega) = \omega$ pour $\omega \in [0.5,1]$ et $Z(\omega) = 0$ pour $\omega \in [0,0.5[$. Déterminer la fonction de répartition de Z, son espérance et sa variance.

Proof. (a) La variable X est à valeurs dans $[0,1]$ car $1-\omega \in [0,1]$ pour tout $\omega \in [0,1]$. Donc pour $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$ et pour $x \geq$, $F_X(x) = 1$. Pour $x \in [0,1]$, on a $\{X \leq x\} = \{\omega \in [0,1],\ 1-\omega \leq x\} = \{\omega \in [0,1],\ 1-x \leq \omega\} = [1-x,1]$. Or $\mathbb{P}([1-x,1]) = x$ car $\mathbb{P}$ mesure la longueur de l'intervalle, d'où $F_X(x) = x$. La loi de X est donc celle d'une variable uniforme sur $[0,1]$, d'où $\mathbb{E}[X] = 1/2$ et $\mathrm{var}(X) = 1/12$.

(b) La variable Y est à valeurs dans $[0,+\infty[$ car $\ln(\omega) \leq 0$ pour tout $\omega \in [0,1]$. Donc pour $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$. Pour $y \geq 0$, on a $\{Y \leq y\} = \{\omega \in [0,1],\ -\ln(\omega) \leq y\} = \{\omega \in [0,1],\ e^{-y} \leq \omega\} = [e^{-y},1]$. Or $\mathbb{P}([e^{-y},1]) = 1-e^{-y}$ car $\mathbb{P}$ mesure la longueur de l'intervalle, d'où $F_Y(y) = 1-e^{-y}$: Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, donc $\mathbb{E}[Y] = 1$ et $\mathrm{var}(Y) = 1$.

(c) Les valeurs prises par Z sont $\{0\} \cup [0.5,1]$. Ainsi, pour $z < 0$ alors $F_Z(z) = 0$, et pour $z \geq 1$, $F_Z(z) = 1$. Si $z \in [0,0.5[$, $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}([0,0.5[) = 0.5$. Si $z \in [0.5,1]$, $F_Z(z) = 0.5 + \mathbb{P}(0.5 \leq Z \leq z) = 0.5 + \mathbb{P}([0.5,z]) = 0.5 + (z-0.5) = z$.
$\mathbb{E}[Z] = \int_{[0,1/2]} 0\,d\omega + \int_{[1/2,1]} \omega\,d\omega = 0 + \left[\omega^2/2\right]_{1/2}^{1} = 3/8$.
Et $\mathbb{E}[Z^2] = \int_{[0,1/2]} 0\,d\omega + \int_{[1/2,1]} \omega^2\,d\omega = 0 + \left[\omega^3/3\right]_{1/2}^{1} = 7/24$, d'où $\mathrm{var}(Z) = 7/24 - 9/64 = 29/192 \simeq 0.151$. □

2. **(*)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Déterminer dans les 2 cas suivants l'espérance et la variance de X:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \frac{1}{2}\left(e^t \mathbb{I}_{]-\infty,0[}(t) + (2-e^{-t})\mathbb{I}_{[0,\infty[}(t)\right); \\ F_X(t) &= \frac{1}{4}(t+2)\mathbb{I}_{[-1,0[\cup[1,2[}(t) + \frac{3}{4}\mathbb{I}_{[0,1]}(t) + \mathbb{I}_{[2,\infty[}(t). \end{aligned}$$

Proof. Dans le premier cas, la fonction de répartition est continue et dérivable sur $\mathbf{R}^*$: la v.a. est donc continue et sa densité est $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$: loi de Laplace. On alors $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{var}(X) = 2$.
Dans le second cas, il y a 2 sauts: en -1 avec un saut de hauteur de $1/4$ et en 0 avec un saut de hauteur $1/4$. La mesure de probabilité de X peut donc s'écrire:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{1}{4}\left(\delta_{\{-1\}}(B) + \delta_{\{0\}}(B)\right) + \frac{1}{4}\int_B \mathbb{I}_{[-1,0[\cup[1,2[}(t)\,dt \quad \text{pour } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

D'où $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4}\big(-1+0-1/2+3/2\big) = 0$ et $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4}\big(1+0+\int_{-1}^{0} t^2 dt + \int_1^2 t^2 dt\big) = \frac{1}{4}\big(1+\frac{8}{3}\big) = \frac{11}{12}$. □

3. **(*)** Soit une variable aléatoire X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que loi de X est symétrique, c'est-à-dire que la loi de X est la même que celle de $-X$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$. Conclusion?

   (b) Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

Proof. (a) On a d'après la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) = 1$. De plus $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(-X < 0) = \mathbb{P}(X < 0)$ puisque X et $-X$ ont même loi, donc même fonction de répartition. D'où $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 2\mathbb{P}(X < 0)$. Par suite, $2\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$, d'où $\mathbb{P}(X > 0) \leq 1/2$. Or, la formule des probabilités totales donne également $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - \mathbb{P}(X > 0)$ et ainsi $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$. $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$ en découle également.

(b) On va traiter les 2 cas de v.a. Si X est une v.a. discrète à valeurs dans $I = (x_j)_{j\in J}$. Comme X et $-X$ ont même loi, forcément quand $x_j \in I$, alors $-x_j \in I$ et $\mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}(X = -x_j)$. Or $\mathbb{E}(X) = \sum_{j\in J} x_j\, \mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{j\in J,\, x_j>0} x_j\, \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_{j\in J,\, x_j<0} x_j\, \mathbb{P}(X = x_j) + 0 * \mathbb{P}(X = 0)$. En conséquence

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j\in J,\, x_j>0} \big(x_j\, \mathbb{P}(X = x_j) - x_j\, \mathbb{P}(X = -x_j)\big) = 0.$$

Pour une v.a. continue, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(-X < -x) = 1 - F_X(-x)$ car la variable est continue. Donc en tout x où F_X est dérivable, $F_X'(x) = 0 - (F_X(-x))' = F_X'(-x)$, d'où $f_X(x) = f_X(-x)$: la densité est une fonction paire. Donc $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx = 0$ car la fonction $x \to x\, f_X(x)$ est impaire.

□

4. **(**)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Montrer, en utilisant Fubini, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty n\, t^{n-1}(1 - F_X(t))\, dt = \int_0^\infty n\, t^{n-1}\mathbb{P}(X > t)\, dt.$$

Montrer que l'hypothèse X positive est nécessaire.

Proof. Du fait que les fonctions intervenant dans l'intégrale sont mesurables positives, on peut écrire avec Fubini, quitte à obtenir $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty n\, t^{n-1}\mathbb{P}(X > t)\, dt &= \int_0^\infty n\, t^{n-1} \int_{]t,\infty[} d\mathbb{P}_X(x)\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_{]t,\infty[} n\, t^{n-1}\, d\mathbb{P}_X(x)\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_{[0,x[} n\, t^{n-1}\, dt\, d\mathbb{P}_X(x) \quad \text{en réécrivant le domaine d'intégration} \\
&= \int_0^\infty x^n\, d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}[X^n].
\end{aligned}$$

Si $n = 1$ et X peut être négative, alors on peut avoir $\mathbb{E}[X] < 0$ ce qui n'est pas possible avec une telle formule. □

5. **(**)** Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite. Soit la v.a. $Y = e^X$. On dit que Y suit une loi log-normale.

   (a) Montrer que Y à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{y}\, e^{-\ln^2(y)/2}$ si $z > 0$ et 0 sinon.

   (b) Pour $a \in [-1, 1]$, soit Y_a la v.a. de densité $f_a(y) = f_Y(y)(1 + a\sin(2\pi\ln(y))$. Montrer que Y et Y_a ont mêmes moments, et en déduire que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.

Proof. (a) Il est clair que $Y : \Omega \to]0, \infty[$ et Y v.a. car $x \in \mathbf{R} \mapsto e^x$ est une fonction continue donc mesurable (borélienne). Donc pour $y \le 0$, $F_Y(y) = 0$. Et pour $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X \le \ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln(y)} e^{-t^2/2}dt.$$

Il est clair que pour tout $y > 0$ cette fonction est dérivable (donc continue) et sa limite en 0^+ est 0: F_Y est continue sur $\mathbf{R}$ et dérivable partout sauf en 0, donc Y est une v.a. continue.
Sa dérivée, donc sa densité, sur $] - \infty, 0[$ est 0 et pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial}\big(F_X(\ln(y)) - F_X(-\infty)\big) = \frac{1}{y}\, f_X(\ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y}\, e^{-\ln^2(y)/2}.$$

(b) Pour tout $a \in [-1, 1]$, il est clair que $f_a(y)$ est mesurable positive, et son intégrale existe car $f_a \le (1 + |a|)f_Y$. De plus,

$$\int_0^\infty f_a(y)\, dy = \int_0^\infty f_Y(y)\, dy + a \int_0^\infty f_Y(y)\, \sin(2\pi\, \ln(y))\, dy = 1 + a \int_\infty^\infty e^x\, f_Y(e^x)\, \sin(2\pi\, x)\, dx.$$

Mais $e^x\, f_Y(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ fonction paire sur $\mathbf{R}$, donc $e^x\, f_Y(e^x)\, \sin(2\pi\, x)$ est une fonction impaire intégrable, donc son intégrale sur $\mathbf{R}$ est nulle. On en déduit que $\int_0^\infty f_a(y)\, dy = 1$ pour tout $a \in [-1, 1]$.
Si on calcule $\mathbb{E}[Y_a^n]$ (qui existe car $\mathbb{E}[Y^n]$ existe) alors:

$$\int_0^\infty y^n\, f_a(y)\, dy = \int_0^\infty y^n\, f_Y(y)\, dy + a \int_0^\infty y^n f_Y(y)\, \sin(2\pi\, \ln(y))\, dy = \mathbb{E}[Y^n] + a\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^\infty e^{(n-1)x}\, e^{-x^2/2}\, \sin(2\pi\, x)\, dx.$$

Mais $e^{(n-1)x-x^2/2} = e^{-(n-1)^2/2}\, e^{-(x-(n-1))^2/2}$. Par changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^{\infty} e^{(n-1)x}\, e^{-x^2/2}\, \sin(2\pi\, x)\, dx &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-(x-(n-1))^2/2}\, \sin(2\pi\, x)\, dx \\ &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, \sin(2\pi\,(z+(n-1)))\, dz = e^{-(n-1)^2/2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, \sin(2\pi\, z)\, dz = 0,\end{aligned}$$

par parité. Donc $\mathbb{E}[Y_a^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \geq 0$ et tout $a \in [-1,1]$: les moments ne caractérise pas la loi, puisque clairement Y_a et Y n'ont pas la même loi si $a \neq 0$.

□

6. **(*)** Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière de $X+1$)

Proof. Y prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(k \leq X+1 < k+1) = F_X(k) - F_X(k-1)$, donc $\mathbb{P}(Y=k) = (1-e^{-\lambda\, k}) - (1-e^{-\lambda(k-1)}) = \big(1-e^{-\lambda}\big)e^{-\lambda(k-1)}$. Ainsi $\mathbb{P}(Y=k) = \big(1-e^{-\lambda}\big)\big(e^{-\lambda}\big)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}\big(1-e^{-\lambda}\big)$: loi géométrique. □

7. **(**)** Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Soit X une variable de fonction de répartition F_X que l'on supposera strictement croissante et dérivable sur $\mathbf{R}$.
   (a) Montrer F_X est une fonction admettant une application réciproque sur $]0,1[$, notée F_X^{-1}.
   (b) Démontrer que la loi de la variable $F_X^{-1}(U)$ est la même que celle de X.
   (c) A partir de la touche `RAND` d'une calculatrice, comment obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 3?
   (d) Même question si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$. Quelle est alors l'espérance de $F_X^{-1}(U)$?

Proof. (a) Si F_X est strictement croissante et dérivable, donc continue, alors comme $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, on en déduit que F_X : $\mathbf{R}ø]0,1[$. De plus, pour tout $y \in]0,1[$, s'il existe $x < x'$ tel que $F_X(x) = F_X(x') = y$ alors F_X ne serait pas strictement croissante: F_X est bien bijective, et admet une fonction réciproque F_X^{-1} sur $]0,1[$.

(b) Comme F_X est dérivable et strictement croissante, sa dérivée ne s'annule pas, donc F_X^{-1} est dérivable et strictement croissante sur $]0,1[$, donc continue: $F_X^{-1}(U)$ est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui prend ses valeurs dans $\mathbf{R}$. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, en utiliant le fait que $F_X(F_X^{-1}(U)) = U$ et F_X strictement croissante,

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x) \qquad \text{car } F_U(u) = u \text{ pour tout } u \in [0,1].$$

La v.a. $F_X^{-1}(U)$ a donc même fonction de répartition que X, ces deux v.a. ont donc même loi.

(c) On sait que la touche `RAND` fournit une réalisation d'une v.a. uniforme sur $[0,1]$. Pour obtenir une réalisation d'une v.a. exponentielle de paramètre, il faudra donc calculer $V = F_X^{-1}(U)$. Or $F_X(x) = 1 - e^{-3\,x}$, d'où $x = -\ln(1-F_X(x))/3$ et on en déduit que $V = -\ln(1-U)/3$.

(d) Si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$ alors $x = \pi\, \tan(F_X(x) - 1/2)$ soit $W = F_X^{-1}(U) = \pi\, \tan(U - 1/2)$.
La densité de X est $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, c'est une v.a. qui suit une loi de Cauchy. On a alors $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx$. Mais cette intégrale n'existe pas car:

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^{\infty} = +\infty.$$

□

8. **(*)** Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. De même pour celle d'une loi de Poisson de paramètre λ. En déduire que la somme de 2 v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 est une loi de Poisson. En est-il de même pour la loi géométrique?

Proof. Si X v.a. de loi géométrique de paramètre p alors pour $z \in [-1,1]$,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p = p\, z \sum_{k=1}^{\infty} (z\,(1-p))^{k-1} = p\, z \sum_{k=0}^{\infty} (z\,(1-p))^{k} = \frac{p\, z}{1-(1-p)\, z}.$$

Si X v.a. de loi de Poisson de paramètre λ alors pour $z \in [-1,1]$,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\,\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{z\,\lambda} = e^{(z-1)\,\lambda}.$$

Si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2, alors par indépendance

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[z^{X_1}]\, \mathbb{E}[z^{X_2}] = e^{(z-1)\,\lambda_1}\, e^{(z-1)\,\lambda_2} = e^{(z-1)\,(\lambda_1+\lambda_2)}$$

qui caractérise la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
Par le même raisonnement, si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2,

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \frac{p_1\, z}{1-(1-p_1)\, z}\, \frac{p_2\, z}{1-(1-p_2)\, z} = \frac{p_1\, p_2\, z^2}{(1-(1-p_1)\, z)(1-(1-p_2)\, z)}$$

qui ne peut clairement pas être simplifié pour faire apparaître la fonction génératrice d'une loi géométrique. □

9. **(*)** Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire : a/ gaussienne, b/ de Poisson, c/ exponentielle, d/ uniforme, e/ gamma, f/ binomiale. En déduire que la somme de 2 v.a. gaussiennes indépendantes est gaussienne.

Proof. a/ Pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m\,,\,\sigma^2)$, on peut toujours écrire que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} m + \sigma\, Z$, avec $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0\,,\,1)$. On a alors $\phi_X(u) = \mathbb{E}\big[e^{i\,u\,(m+\sigma\, Z)}\big] = e^{i\,u\,m} \phi_Z(\sigma\, u)$. Mais:

$$\phi_Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,u\,x - x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left((x-iu)+u^2\right)}\, dx = e^{-u^2/2},$$

après changement de variable $y = x - iu$. D'où $\phi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}\,\sigma^2\, u^2 + i\,u\,m}$.
b/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda^k e^{iuk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\lambda\, e^{iu}\right)^k = e^{-\lambda} e^{\lambda\, e^{iu}} = e^{\lambda\,(e^{iu}-1)}.$$

c/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \int_0^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda\, x + i\,u\,x} dx = \Big[\frac{\lambda}{i\,u-\lambda}\, e^{(-\lambda+i\,u)x}\Big]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{-i\,u+\lambda}.$$

d/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([a,b])$, alors pour $u \in \mathbf{R}^*$,

$$\phi_X(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{i\,u\,x} dx = \frac{1}{b-a} \Big[\frac{\lambda}{i\,u}\, e^{i\,ux}\Big]_a^b = \frac{1}{i\,(b-a)\,u} \big(\cos(ub) - \cos(ua) + i(\sin(ub) - \sin(ua))\big).$$

e/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha,\beta)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-\beta\, x + i\,u\,x} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta - i\,u)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}\, e^{-y} dy = \big(1 - iu/\beta\big)^{-\alpha},$$

avec le changement de variable $y = (\beta - i\,u)x$, soit $dy = (\beta - i\,u)dx$. f/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} e^{iuk} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \Big(\frac{p\, e^i u}{1-p}\Big)^k = (1-p)^n \Big(1 + \frac{p\, e^i u}{1-p}\Big)^n = \big(1 + p\,(e^{iu}-1)\big)^n,$$

en utilisant la formule du binome.

Si deux v.a. X et X' sont gaussiennes de lois $\mathcal{N}(m\,,\,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m'\,,\,\sigma'^2)$ sont indépendantes, alors $\phi_{X+X'}(u) = \phi_X(u)\, \phi_{X'}(u)$ par l'indépendance, soit $\phi_{X+X'}(u) = e^{-\frac{1}{2}\,\sigma^2\, u^2 + i\,u\,m - \frac{1}{2}\,\sigma'^2\, u^2 + i\,u\,m'} = e^{-\frac{1}{2}\,(\sigma^2+\sigma'^2)\, u^2 + i\,u\,(m+m')}$, soit la loi $\mathcal{N}(m + m'\,,\,\sigma^2 + \sigma'^2)$. □

10. **(***)** En utilisant la formule d'inversion de la fonction caractéristique pour les v.a. continues, démontrer que la fonction de caractéristique d'une v.a. de Cauchy de densité $f(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ sur $\mathbf{R}$ est $\phi(u) = e^{-|u|}$.

Proof. On part de la formule de la densité caractéristique $\phi(u) = e^{-|u|}$. Comme on sait que X est une variable "continue" et que cette fonction caractéristique est intégrable, on utilise la formule d'inversion:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(u)\, e^{-i\,u\,x} du \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Donc pour $x \in \mathbf{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|-i\,u\,x} du$. On en déduit que:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{u-i\,u\,x} du + \frac{1}{2\,\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-u-i\,u\,x} du = \frac{1}{2\,\pi}\Big(\Big[\frac{e^{u-i\,u\,x}}{1-i\,x}\Big]_{-\infty}^{0} + \Big[\frac{e^{-u-i\,u\,x}}{-1-i\,x}\Big]_{0}^{\infty}\Big) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Par unicité de la fonction caractéristique, on en déduit que celle-ci est bien celle d'une loi de Cauchy. ☐

11. **(**)** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda\,\mathbb{E}[X] + X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}$.

(b) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que

$$\big(\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\mathbb{E}[X]\}}\big]\big)^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{P}\big(X > \lambda\mathbb{E}[X]\big).$$

(c) Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a l'Inégalité de Paley-Zygmund:

$$\mathbb{P}\big(X > \lambda\,\mathbb{E}[X]\big) \geq (1-\lambda)^2\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Proof. (a) Si $X > \lambda\,\mathbb{E}[X]$ alors le terme de droite vaut X, donc l'inégalité est vérifiée. Si $X \leq \lambda\,\mathbb{E}[X]$, alors $\lambda\,\mathbb{E}[X] + X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}} = \lambda\,\mathbb{E}[X]$. Mais comme cela a lieu pour $X \leq \lambda\,\mathbb{E}[X]$, l'inégalité est bien vérifiée. Elle l'est donc dans tous les cas.

(b) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{I}^2_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{X>\lambda\mathbb{E}[X]\}}\big] = \mathbb{P}\big(X > \lambda\,\mathbb{E}[X]\big).$$

(c) Grâce à la première question, $X - \lambda\,\mathbb{E}[X] \leq X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}$. En prenant l'espérance on obtient donc que $(1-\lambda)\,\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}\big[X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}\big]$. Comme $\mathbb{E}[X] \geq 0$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $(1-\lambda)\,\mathbb{E}[X] \geq 0$. Donc

$$(1-\lambda)^2\,\big(\mathbb{E}[X]\big)^2 \leq \big(\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}\big]\big)^2.$$

Le résultat final est alors obtenu grâce à celui de la deuxième question.

☐