

Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2023 – 2024

Feuilles de TD, cours de L3 Statistique 2

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: bardet@univ-paris1.fr

Page oueb: <http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet->

Feuille n° 1:
Variables aléatoires

1. (*) Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ la tribu borélienne sur Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $[0, 1]$.
 - (a) On pose X la variable aléatoire telle que $X(\omega) = 1 - \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Répondre aux mêmes questions pour $Y(\omega) = -\ln(\omega)$.
 - (c) On pose $Z(\omega) = \omega$ pour $\omega \in [0.5, 1]$ et $Z(\omega) = 0$ pour $\omega \in [0, 0.5[$. Déterminer la fonction de répartition de Z .

2. (**) Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X . Déterminer dans les 2 cas suivants l'espérance et la variance de X :

$$F_X(t) = \frac{1}{2} (e^t \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(t) + (2 - e^{-t}) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(t));$$

$$F_X(t) = \frac{1}{4} (t + 2) \mathbb{I}_{[-1, 0[\cup [1, 2[}(t) + \frac{3}{4} \mathbb{I}_{[0, 1]}(t) + \mathbb{I}_{[2, \infty[}(t).$$

3. (*) Soit une variable aléatoire X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $-\omega \in \Omega$ et également que la loi de X est symétrique, c'est-à-dire que la loi de X est la même que celle de $-X$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$. Conclusion?
 - (b) Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

4. (**) Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probablisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X . Montrer, en utilisant Fubini, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty n t^{n-1} (1 - F_X(t)) dt = \int_0^\infty n t^{n-1} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

Montrer que l'hypothèse X positive est nécessaire.

5. (***) Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite. Soit la v.a. $Y = e^X$. On dit que Y suit une loi log-normale.
 - (a) Montrer que Y à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y} e^{-\ln^2(y)/2}$ si $z > 0$ et 0 sinon.
 - (b) Pour $a \in [-1, 1]$, soit Y_a la v.a. de densité $f_a(y) = f_Y(y)(1 + a \sin(2\pi \ln(y)))$. Montrer que Y et Y_a ont mêmes moments, et en déduire que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.
6. (*) Soit $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = [X + 1]$? (partie entière de $X + 1$)

7. (**) Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Soit X une variable de fonction de répartition F_X que l'on supposera strictement croissante et dérivable sur $\mathbf{R}$.

- (a) Montrer F_X est une fonction admettant une application réciproque sur $]0, 1[$, notée F_X^{-1} .
- (b) Démontrer que la loi de la variable $F_X^{-1}(U)$ est la même que celle de X .
- (c) A partir de la touche **RAND** d'une calculatrice, comment obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 3?
- (d) Même question si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$. Quelle est alors l'espérance de $F_X^{-1}(U)$?
8. (***) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . De même pour celle d'une loi de Poisson de paramètre λ . En déduire que la somme de 2 v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 est une loi de Poisson. En est-il de même pour la loi géométrique?
9. (*) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire : a/ gaussienne, b/ de Poisson, c/ exponentielle, d/ uniforme, e/ gamma, f/ binomiale. En déduire que la somme de 2 v.a. gaussiennes indépendantes est gaussienne.
10. (***) En utilisant la formule d'inversion de la fonction caractéristique pour les v.a. continues, démontrer que la fonction de caractéristique d'une v.a. de Cauchy de densité $f(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ sur $\mathbf{R}$ est $\phi(u) = e^{-|u|}$.
11. (***) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.
- (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$.
- (b) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que

$$(\mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}])^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \Pr(X > \lambda \mathbb{E}[X]).$$

- (c) Montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a l'Inégalité de Paley-Zygmund:

$$\Pr(X > \lambda \mathbb{E}[X]) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Feuille n^o 2:
Vecteurs aléatoires

1. (*) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ dont la loi a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$,

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbb{I}_{\{x, y \geq 0\}}.$$

- (a) Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
 (b) Déterminer les lois de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
2. (*) Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.
- (a) Déterminer les fonctions de répartition des v.a. $U = \min\{X_1, X_2\}$ et $V = \max\{X_1, X_2\}$, et en déduire les densités de probabilité de U et V .
 (b) Calculer $\text{cov}(U, V)$. Les variables U et V sont-elles indépendantes?
 (c) Que vaut $\mathbb{E}[|X_1 - X_2|]$?
3. (**) On considère $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que X est absolument continue, c'est-à-dire que la mesure de probabilité de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$.

- (a) Montrer alors que la loi de X_1 admet une densité f_1 par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1 sur $\mathbb{R}$, que l'on exprimera en fonction de f .
 (b) Calculer f_1 et f_2 pour f telle que :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1} & \text{si } x_1 \geq x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A-t-on $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ pour λ_2 -presque tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$? Quelle conclusion en tirer sur X_1 et X_2 ?

- (c) On suppose maintenant que $X = (X_1, X_1)$ où X_1 est absolument continue par rapport à λ_1 . Le vecteur aléatoire X est-il absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$?
4. (**) Soit L une v.a. positive admettant une densité de probabilité f et X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de L . On définit deux v.a. L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1 - X)L$ (cela représente par exemple la rupture aléatoire en 2 morceaux de longueurs L_1 et L_2 d'une certaine molécule de longueur initiale (aléatoire) L).
- (a) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) , ainsi que les lois marginales de L_1 et L_2 .
 (b) Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(y) = \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(y) \lambda^2 y e^{-\lambda y}$ ($\lambda > 0$)?
 (c) Déterminer la loi de $Z = \min\{L_1, L_2\}$.

5. (**) On considère un couple indépendant de v.a. (X, Y) . On suppose que X admet une densité f et que Y est une variable discrète qui prend ses valeurs dans $\{y_n, n \in I\}$, $I \subseteq \mathbf{N}$ où $(y_n)_{n \in I} \subset \mathbb{R}$. Montrer que $Z = X + Y$ possède une densité f_Z et donner sa formule.

6. (***) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de n v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Montrer que $\mathbb{P}(\exists(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j, X_i = X_j) = 0$.

(b) On pose $Z = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Déterminer la loi de Z .

(c) Soit $N = \min\{1 \leq i \leq n, X_i = Z\}$. Montrer que N est une v.a. et établir que $\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \frac{e^{-nt}}{n}$ pour $k = 1, \dots, n$ et $t > 0$. En déduire que Z et N sont des v.a. indépendantes et préciser la loi de N .

7. (**) Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.i.i.d., uniformes sur $[0, 1]$.

(a) On pose $W_i = -\log X_i$. Montrer que W_i suit une loi exponentielle de paramètre 1.

(b) On rappelle qu'une loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ de paramètres (p, α) avec $\alpha, \beta > 0$ est une loi continue de densité sur $\mathbf{R}$:

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{I}_{x>0}$$

Soient U, V indépendants telles que $U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $V \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha_2, \beta)$. Quelle est la loi de $U + V$?

(c) En déduire la loi de $W_1 + \dots + W_n$.

(d) Utiliser le résultat précédent pour trouver la loi de $\prod_{i=1}^n X_i$.

8. (**) Soient X et Y deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose $S = \min(X, Y)$ et $T = |X - Y|$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(S > a, T > b, X > Y)$ et $\mathbb{P}(S > a, T > b, X < Y)$.

(b) En déduire $\mathbb{P}(X < Y)$, la loi de S , et la loi de T .

9. (**) Soit (X_1, X_2, X_3) vecteur aléatoire centré de matrice de covariance

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Calculer la variance de $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$.

(b) En déduire que X_3 est une combinaison linéaire de X_1 et X_2 p.s.

(c) Plus généralement, pour un vecteur aléatoire Y de matrice de covariance Γ , donner une condition nécessaire et suffisante sur Γ pour que l'une des composantes de Y soit une fonction affine des autres composantes de Y p.s.

(d) Soit maintenant Z un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$. Supposons que Z admette une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$. Soit $x \in \mathbf{R}^d$ un vecteur non-nul. Montrer qu'alors la v.a. $U = x^t Z$ a une densité sur $\mathbf{R}$.

(e) Si Y est un vecteur aléatoire de matrice de covariance non-inversible, peut-il avoir une densité?

Feuille n° 3:
Vecteurs gaussiens

1. (*) Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Quelle est la loi de X_3 et celle de (X_1, X_2) et que peut-on dire de ces 2 vecteurs aléatoires?
 - (b) Déterminer la densité de la loi de (X_1, X_2, X_3) .
 - (c) Quelle est la loi de $(X_1 - X_2, X_3 - X_1)$?
2. (**) Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite et soit Y une v.a. indépendante de X , à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.5$. On considère la v.a. $Z = XY$.
- (a) Déterminer la mesure de probabilité de Z .
 - (b) Déterminer $\text{cov}(X, Z)$. Les variables X et Z sont-elles indépendantes?
 - (c) Déterminer la mesure de probabilité de $X + Z$. En déduire que la somme de 2 variables gaussiennes non-corrélées peut ne pas être gaussienne.
3. (*) Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi commune $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$, celle de $W = \frac{1}{2}(X - Y)^2$ et enfin celle de $Z/\sqrt{W}$.
4. (**) Soient X et Y des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
- (a) Déterminer la loi du couple de $(X + Y, X - Y)$. Que remarque-t-on?
 - (b) Déterminer également la loi du couple $(X/Y, Y)$ puis celle de la v.a. X/Y . Les v.a. X/Y et Y sont-elles indépendantes?
 - (c) En déduire la densité de la loi de Student de degré 1.
5. (**) Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que Γ est bien une matrice de variance-covariance et déterminer ses valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés.
 - (b) Démontrer que $\mathbb{E}[(2X_1 - X_2)^2] = 0$. En déduire la densité de la loi de (X_1, X_2) par rapport à une mesure que l'on précisera.
 - (c) Généraliser à un vecteur gaussien quelconque dont la matrice de covariance est singulière.
6. (***) Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Γ .
- (a) Démontrer que $\mathbb{E}[e^{<s, X>}] = e^{\frac{1}{2} {}^t s \Gamma s}$ pour tout $s \in \mathbf{R}^4$. En utilisant l'unicité du développement en série entière, en déduire que $\mathbb{E}[<s, X>^4] = 3 ({}^t s \Gamma s)^2$. En déduire que

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3].$$

- (b) Déduire également que $\mathbb{E}[X_1X_2X_3] = 0$.
- (c) Si (X, Y) est un vecteur gaussien d'espérance m et de matrice de variance-covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$, en déduire $\text{var}(X^2)$ et $\text{cov}(X^2, Y^2)$.

Feuille n° 4:

Convergence et théorèmes limites

1. (*) Soit $(X_n)_n$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $\theta \in]0, 1[$.
 - (a) Montrer que $X_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \theta$. En déduire que $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \theta(1 - \theta)$.
 - (b) Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta))$.
 - (c) Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$.
 - (d) Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}(\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - \theta(1 - \theta))$ pour $\theta \neq 1/2$.
2. (*) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[X_k^2] < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$. On suppose qu'il existe des réels m et C tels que pour tout k , $\mathbb{E}[X_k] = m$ et $\text{var} X_k \leq C$. Montrer que la suite des $\bar{X}_n$ converge vers m dans $\mathbb{L}^2$ et en probabilité.
3. (**) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que :
 - (a) $((X_n)$ converge en probabilité vers 0) $\iff$ (la suite $(\mathbb{P}(X_n > 0))$ tend vers 0).
 - (b) $((X_n)$ converge presque-sûrement vers 0) $\iff$ (la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n > 0) < \infty$).
 - (c) On suppose que (X_n) suit une loi de Poisson de paramètre α_n . Etudier la convergence de la suite (X_n) dans $\mathbb{L}^1$ puis presque-sûrement dans les cas où $\alpha_n = 1/n$ et $\alpha_n = 1/n^2$.
4. (**) Soit (X_n) une suite de v.a. positives telle que $X_{n+1} \leq X_n$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$ si et seulement si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$. En déduire que si (Y_n) est une suite de v.a. non nécessairement positives, et si on note $Y_n^* = \sup_{k \geq n} |Y_k|$ alors $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$ si et seulement si $Y_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$.
5. (**) Soit $\Omega = [0, 1]$ et soit la suite (X_n) de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{B}([0, 1]), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la loi uniforme sur $[0, 1]$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n(\omega) = (n+1)^2 \omega^n - (n+1) \quad \text{pour tout } \omega \in [0, 1].$$

Que vaut $\mathbb{E}[X_n]$? Démontrer pourtant que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} -\infty$. La suite (X_n) converge-t-elle dans $\mathbb{L}^2$?

6. (**) On suppose $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} c$ pour une suite de v.a. $(X_n)_n$ à valeurs réelles et $c \in \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \min(x, 1)$.
 - (a) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant une caractérisation de la convergence en loi, quelle est la limite de $\mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\varepsilon)]$ quand $n \rightarrow \infty$?
 - (b) En déduire que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} c$.

7. (***) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. telle que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $Y_k = \overline{X}_k$ pour $k \geq 1$. Peut-on obtenir la loi faible des grands nombres pour la suite (Y_k) ? La loi forte des grands nombres? Dans le cas particulier où les X_k suivent une loi normale centrée réduite déterminer un théorème de limite centrale.

8. (**) Appliquer le théorème limite central à une suite de v.a.i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite

$$u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

9. (***) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. centrées de variance commune 1. Soit $(a_{i,n})_{1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels telle que $\sum_{i=1}^n a_{i,n}^2 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On va montrer que si $\max_{1 \leq i \leq n} |a_{i,n}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors la suite des (S_n) telle que $S_n = \sum_{i=1}^n a_{i,n} X_i$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

(a) Montrer que si (z_j) et (z'_j) sont deux familles de nombres complexes tels que $|z_j| \leq 1$ et $|z'_j| \leq 1$ pour tout j , alors

$$\left| \prod_{j=1}^n z_j - \prod_{j=1}^n z'_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j - z'_j|.$$

(b) Déterminer la fonction caractéristique de S_n . En déduire sa limite en utilisant l'inégalité précédente.

10. (**) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. centrées de variance commune $\sigma^2 > 0$.

(a) Rappeler la limite en loi de S_n telle que $S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$.

(b) Décomposer la variable S_{2n} en fonction de S_n et d'une variable aléatoire S'_n indépendante de S_n et de même loi.

(c) En raisonnant par l'absurde, montrer que S_n ne converge pas en probabilité (on pourra montrer que si c'était le cas, S'_n convergerait aussi en probabilité et étudier sa limite).

Feuille n° 5:

Estimation paramétrique

1. (*) Soit un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.i.i.d. suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, où $\theta > 0$ est inconnu. Déterminer un estimateur du maximum de vraisemblance de θ . Est-il biaisé? Convergent? Efficace?
2. (**) Soit un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.i.i.d. suivant une loi de densité $f_\theta(x) = (\theta+1)x^\theta \mathbb{I}_{0 < x \leq 1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, où $\theta > 0$ est inconnu. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ . Après avoir calculé $\mathbb{E}[\log(X_1)]$, montrer que $\hat{\theta}$ est convergent.
3. (*) On considère un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ dont la loi dépend d'un paramètre $\theta \in \mathbf{R}$ inconnu. Soit $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ deux estimateurs non biaisés de θ , tels que $\mathbb{E}[\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2] < \infty$. Pour $\alpha \in [0, 1]$ on considère $\hat{\theta} = \alpha \hat{\theta}_1 + (1 - \alpha) \hat{\theta}_2$ et on notera $R(\hat{\theta}_1)$, $R(\hat{\theta}_2)$ et $R(\hat{\theta})$ les risques quadratiques de $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ et $\hat{\theta}$.
 - (a) On suppose que $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont indépendants. Déterminer α en fonction de $R(\hat{\theta}_1)$ et $R(\hat{\theta}_2)$, de telle manière que le $R(\hat{\theta})$ soit minimum. Que vaut alors $R(\hat{\theta})$?
 - (b) Si $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ ne sont pas indépendants, montrer que l'on a tout de même

$$R(\hat{\theta}) \leq 2 \frac{R(\hat{\theta}_1) R(\hat{\theta}_2)}{R(\hat{\theta}_1) + R(\hat{\theta}_2)}.$$
4. (**) On considère un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.i.i.d. suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$ est inconnu.
 - (a) Déterminer l'estimateur $\hat{\lambda}$ par maximum de vraisemblance de λ .
 - (b) Déterminer la loi de $\sum_{j=1}^n X_j$. En déduire que $\hat{\lambda}$ est biaisé.
 - (c) L'estimateur $\hat{\lambda}$ est-il convergent?
 - (d) Etablir un TLC vérifié par $1/\hat{\lambda}$. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour λ .
 - (e) En utilisant la Delta-Méthode déterminer un TLC vérifié par $\hat{\lambda}$. En déduire que $\hat{\lambda}$ est asymptotiquement efficace.
5. (**) On considère un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.i.i.d. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$, où $p \in]0, 1[$ est inconnu alors que $k \in \mathbb{N}^*$ est connu. On voudrait estimer la probabilité $\theta = \mathbb{P}(X_1 = 1)$.
 - (a) Déterminer l'estimateur $\hat{p}$ par maximum de vraisemblance de p . Est-il biaisé? Efficace? Etablir un TLC vérifié par $\hat{p}$.
 - (b) En déduire un estimateur $\hat{\theta}$ de θ . Est-il convergent? Etablir un TLC vérifié par $\hat{\theta}$ pour $p \neq 1/k$. En utilisant le lemme de Slutsky, déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour θ .
 - (c) Soit $\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{X_j=1}$. Montrer que $\tilde{\theta}$ est non biaisé. Etablir un TLC vérifié par $\tilde{\theta}$. Pour p proche de 0, de 1 et de $1/k$, quel estimateur préférer entre $\hat{\theta}$ et $\tilde{\theta}$?
6. (**) On considère un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.i.i.d. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$, où $p \in]0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ sont inconnus. Obtenir explicitement l'estimateur par maximum de vraisemblance de (p, k) est très difficile, dans cet exercice on essaie autre chose.

- (a) Rappeler l'espérance m et la variance σ^2 de X_1 .
- (b) Déterminer des estimateurs naturels de m et σ^2 . Sont-ils convergents?
- (c) En déduire des estimateurs convergents de p et de k .

7. (***) Soit $((\Omega')^n, \mathcal{A}'_n, (\mathbb{P}_\theta)^{\otimes n}, \theta \in]0, \infty[)$ un modèle paramétrique tel que $\mathbb{P}_\theta$ admette pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{x} \mathbb{I}_{x \in]\theta, 2\theta[}.$$

- (a) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour ce modèle n'est pas unique.
- (b) On observe $(X_1, \dots, X_n)$ du modèle statistique et on pose $\hat{\theta}_n^{(1)} = \frac{1}{2} \max(X_1, \dots, X_n)$ et $\hat{\theta}_n^{(2)} = \min(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer la loi de ces estimateurs et montrer qu'ils convergent. Sans rentrer dans les calculs, donner un court raisonnement montrant qu'ils sont biaisés.

8. (***) Soit X une v.a. suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{\lambda})$ où $n \in \mathbf{N}^*$ est connu et $\lambda \geq 1$ est inconnue. On observe une réalisation de X est on estime λ par un estimateur $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(X)$.

- (a) Montrer que si $\hat{\lambda}$ est un estimateur sans biais de λ , alors pour tout $\lambda \in [1, \infty[$,

$$\lambda^{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \hat{\lambda}(k) (\lambda - 1)^{n-k} = 0.$$

- (b) En déduire qu'il n'existe pas d'estimateur $\hat{\lambda}$ sans biais de λ .

9. (***) Soit un n -échantillon de v.a.i.i.d. $(X_1, \dots, X_n)$ de loi admettant la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ avec:

$$f(x) = (1 - \theta) \cdot \mathbb{I}_{]-1/2, 0[}(x) + (1 + \theta) \cdot \mathbb{I}_{]0, 1/2[}(x),$$

où $\theta \in]-1, 1[$ est un paramètre inconnu.

- (a) Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance.
- (b) Est-il sans biais? Converge-t-il? $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur efficace?
- (c) Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$? En déduire un intervalle de confiance à 95%.

10. (***) On considère le modèle paramétrique gaussien $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \mathcal{N}(m, \sigma^2)^{\otimes n}, (m, \sigma^2) \in \mathbf{R} \times]0, +\infty[)$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon observé de ce modèle.

- (a) Soit l'estimateur $\hat{T}_n = (\bar{X}_n, \bar{\sigma}_n^2)$, où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. En utilisant le théorème de Cochran (on considérera le sous-espace engendré par le vecteur de $\mathbf{R}^n$, $(1, \dots, 1)'$), montrer que cet estimateur est sans biais et que ses 2 composantes sont indépendantes. Est-il efficace?
- (b) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de (m, σ^2) . Est-il biaisé? Efficace? Comparer avec l'estimateur précédent.

11. (***) Soit $((\Omega')^n, \mathcal{A}'_n, (\mathbb{P}_\theta)^{\otimes n}, \theta \in]0, \infty[)$ un modèle paramétrique tel que $\mathbb{P}_\theta$ admette pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \mathbb{I}_{x \in]\theta, \theta+1[}.$$

- (a) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour ce modèle n'est pas unique.
- (b) On pose $\hat{\theta}_n^{(1)} = \max(X_1, \dots, X_n) - 1$ et $\hat{\theta}_n^{(2)} = \min(X_1, \dots, X_n)$. Pour chacun de ces estimateurs, déterminer la loi, l'espérance et la variance. Sont-ils convergents? Efficaces?
- (c) Déterminer un estimateur de la forme $\hat{\theta}_n = \alpha \hat{\theta}_n^{(1)} + (1 - \alpha) \hat{\theta}_n^{(2)}$, avec $\alpha \in [0, 1]$, qui soit sans biais.
- (d) Pour $n = 2$, déterminer $\text{cov}(\hat{\theta}_2^{(1)}, \hat{\theta}_2^{(2)})$. Le risque quadratique de $\hat{\theta}_2$ est-il inférieur à ceux de $\hat{\theta}_2^{(1)}$ et $\hat{\theta}_2^{(2)}$? $\hat{\theta}_2$ est-il efficace?

12. (***) Soit un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a. telles que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = p$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = 1 - p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec $p \in]0, 1[$ un paramètre inconnu.

- (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$.
- (b) Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de p . Est-il biaisé?