Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2023 – 2024

Feuilles de TD, cours de L3 Statistique 2

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:
Variables aléatoires

1. **(*)** Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ la tribu borélienne sur Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $[0,1]$.
   (a) On pose X la variable aléatoire telle que $X(\omega) = 1 - \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.
   (b) Répondre aux mêmes questions pour $Y(\omega) = -\ln(\omega)$.
   (c) On pose $Z(\omega) = \omega$ pour $\omega \in [0.5, 1]$ et $Z(\omega) = 0$ pour $\omega \in [0, 0.5[$. Déterminer la fonction de répartition de Z.

2. **(**)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Déterminer dans les 2 cas suivants l'espérance et la variance de X:
$$\begin{aligned} F_X(t) &= \frac{1}{2}\left(e^t \mathbb{I}_{]-\infty,0[}(t) + (2 - e^{-t})\mathbb{I}_{[0,\infty[}(t)\right); \\ F_X(t) &= \frac{1}{4}(t+2)\mathbb{I}_{[-1,0[\cup[1,2[}(t) + \frac{3}{4}\mathbb{I}_{[0,1]}(t) + \mathbb{I}_{[2,\infty[}(t). \end{aligned}$$

3. **(*)** Soit une variable aléatoire X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $-\omega \in \Omega$ et également que la loi de X est symétrique, c'est-à-dire que la loi de X est la même que celle de $-X$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$. Conclusion?
   (b) Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

4. **(**)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Montrer, en utilisant Fubini, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty n\, t^{n-1}(1 - F_X(t))\, dt = \int_0^\infty n\, t^{n-1}\mathbb{P}(X > t)\, dt.$$
   Montrer que l'hypothèse X positive est nécessaire.

5. **(***)** Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite. Soit la v.a. $Y = e^X$. On dit que Y suit une loi log-normale.
   (a) Montrer que Y à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{y}\, e^{-\ln^2(y)/2}$ si $z > 0$ et 0 sinon.
   (b) Pour $a \in [-1,1]$, soit Y_a la v.a. de densité $f_a(y) = f_Y(y)(1 + a\sin(2\pi \ln(y)))$. Montrer que Y et Y_a ont mêmes moments, et en déduire que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.

6. **(*)** Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière de $X+1$)

7. **(**)** Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Soit X une variable de fonction de répartition F_X que l'on supposera strictement croissante et dérivable sur $\mathbf{R}$.

(a) Montrer F_X est une fonction admettant une application réciproque sur $]0,1[$, notée F_X^{-1}.

(b) Démontrer que la loi de la variable $F_X^{-1}(U)$ est la même que celle de X.

(c) A partir de la touche `RAND` d'une calculatrice, comment obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 3?

(d) Même question si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$. Quelle est alors l'espérance de $F_X^{-1}(U)$?

8. **(**)** Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. De même pour celle d'une loi de Poisson de paramètre λ. En déduire que la somme de 2 v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 est une loi de Poisson. En est-il de même pour la loi géométrique?

9. **(*)** Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire : a/ gaussienne, b/ de Poisson, c/ exponentielle, d/ uniforme, e/ gamma, f/ binomiale. En déduire que la somme de 2 v.a. gaussiennes indépendantes est gaussienne.

10. **(***)** En utilisant la formule d'inversion de la fonction caractéristique pour les v.a. continues, démontrer que la fonction de caractéristique d'une v.a. de Cauchy de densité $f(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ sur $\mathbf{R}$ est $\phi(u) = e^{-|u|}$.

11. **(***)** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda\mathbb{E}[X] + X\mathbb{I}_{\{X > \lambda\mathbb{E}[X]\}}$.

(b) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que

$$\left(\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X>\lambda\mathbb{E}[X]\}}]\right)^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\ \Pr(X > \lambda\mathbb{E}[X]).$$

(c) Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a l'Inégalité de Paley-Zygmund:

$$\Pr(X > \lambda\mathbb{E}[X]) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$