

DYNAMIQUES ASYMPTOTIQUES, OSCILLATIONS ET CHAOS EN ÉCONOMIE

Contribution des équations différentielles fonctionnelles
à l'étude des dynamiques complexes

André A. Keller (CLERSE, UMR8019 CNRS - Univ. Lille 1)

4^{ème} Journée Math-Eco, 18 Mai 2010- Université Lille 1



INTRODUCTION

1. Notions préliminaires
2. Références historiques
3. Dynamique d'Ikeda-Matsumoto

2

1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

- Problème de Cauchy:

soit le système différentiel

$$y'(t) = f(t, y(t), y_t), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

où $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times C^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec la condition initiale $y_t = \{y(\tau) : \tau \leq t\}$

Exemples d'équations scalaires à retards:

1) retards discrets: $y' = f(t, y, y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_m))$, $\tau_1 > \dots > \tau_m \geq 0$

2) retards distribués: $y' = f(t, y, \int_{-\infty}^0 y(t+\tau) d\mu(\tau))$.

3) retards variables: $y' = f(t, y, y(t-\tau(t, y)))$

- Réduction à un système d'EDOs:

- *cas particulier:* soit l'EDD intégro-différentielle scalaire

$$y' = f(t, y, \int_{-\infty}^0 y(t+s) e^{\lambda s} ds)$$

en intégrant par parties la dérivée du temps de l'intégrale définie désignée par $x(t)$, l'EDD se réduit à un système formé de deux EDOs

$$\begin{cases} x' = y - \lambda x \\ y' = f(t, y, x) \end{cases}$$

NOTIONS PRÉLIMINAIRES (SUITE 1/2)

- *cas général*: soit le système différentiel autonome à retards distribués

$$y' = F(y, y(t-\tau))$$

On a aussi

$$y'_1 = F(y_1, y^*), \quad y^* = \int_{-\infty}^t y_1(\theta) H(t-\theta) d\theta,$$

en supposant une fonction densité de la forme

$H(t;p,m) = m^{p+1} t^p e^{-mt} / p!$ et de retard moyen $(1+p)/m$, on se ramène au système de $p+2$ EDOs:

$$\begin{cases} y'_1 = F(y_1, y_{2+p}) \\ y'_2 = m(y_1 - y_2) \\ \dots \\ y'_{2+p} = m(y_{1+p} - y_{2+p}) \end{cases}$$

Les simulations montrent des cycles périodiques pour certaines valeurs de p . Des valeurs élevées de p , traduisant une hétérogénéité des délais de réaction conduisent à des dynamiques chaotiques.

1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES (SUITE 2/2)

○ Equation caractéristique

Soit l'EDD matricielle à m retards discrets

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}_0 \mathbf{y} + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(t - \tau_1) + \dots + \mathbf{A}_m \mathbf{y}(t - \tau_m), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

En posant la solution $\mathbf{y} = \mathbf{C}e^{\lambda t}$, l'équation caractéristique des solutions non triviales est

$$|\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 e^{-\tau_1 \lambda} + \dots + \mathbf{A}_m e^{-\tau_m \lambda} - \lambda \mathbf{I}_n| = 0$$

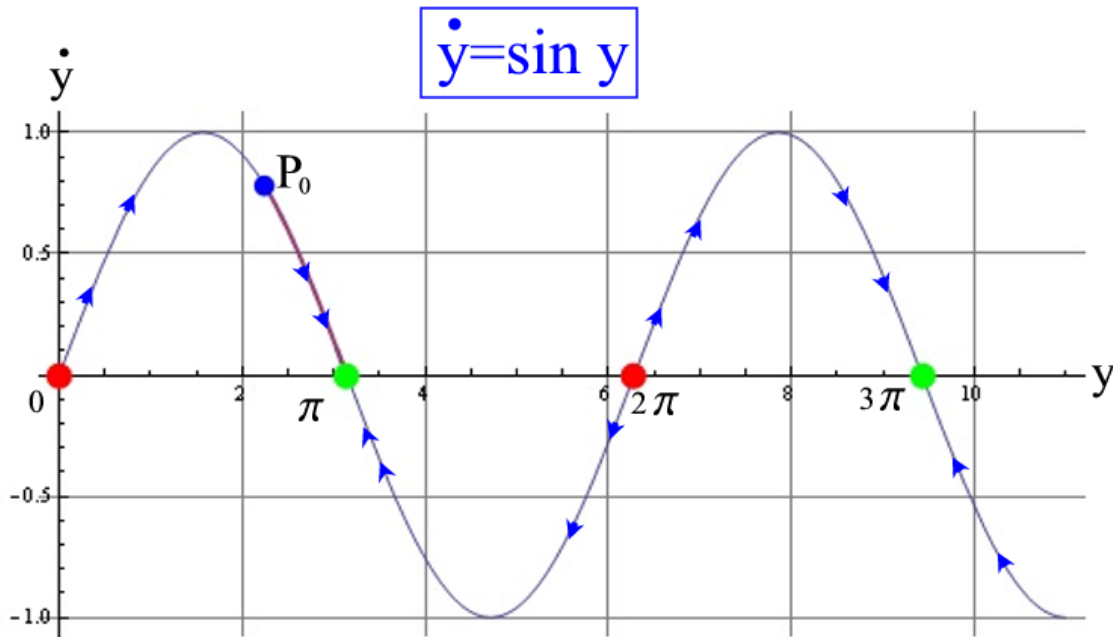
Exemple 1: soit l'EDD scalaire $y' = -y(t-1)$. L'équation caractéristique transcendante est $\lambda e^\lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Les solutions (en nombre infini) sont données par la k -ème branche de la **fonction de Lambert** $\lambda = W_k(-1)$.

Exemple 2: soit le système linéaire à retard $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}(t - \tau)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \lambda e^{-\tau \lambda} \operatorname{tr} \mathbf{A} + e^{-2\tau \lambda} |\mathbf{A}| = 0$$

2. RÉFÉRENCES HISTORIQUES

- J.-B. Biot, Sur les équations aux différences mêlées, Mémoires de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts par divers Savants, Vol.I (1806), pp.296-327.
- S.D. Poisson, Mémoire sur les équations aux différences mêlées, J. de l'Ecole Polytechnique, Tome VI, XIIIe Cahier (1806), pp. 126-147.
- S.F. Lacroix, Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, Vol. III, 2^e édition, Paris, 1819 (chapitre VIII, pp.605-630).
- H. Poincaré, Sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps, Acta Mathematica **13**, 1890, pp.1-270.
- P. Painlevé, Sur les petits mouvements périodiques des systèmes, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Tome 184 (1897), pp. 1222-1225.



solutions: $y(t) = 2 \arctan \left(e^t \tan \frac{y_0}{2} \right)$

comportement asymptotique: $y(t) \rightarrow \pm \pi$

multiplicateurs: $m(y^*) = \cos y \Big|_{y=y^*} = \pm 1$

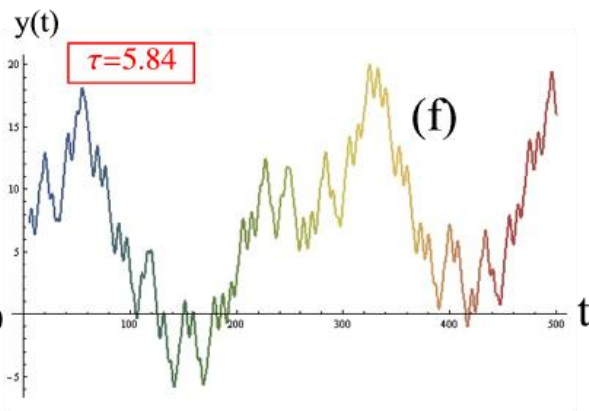
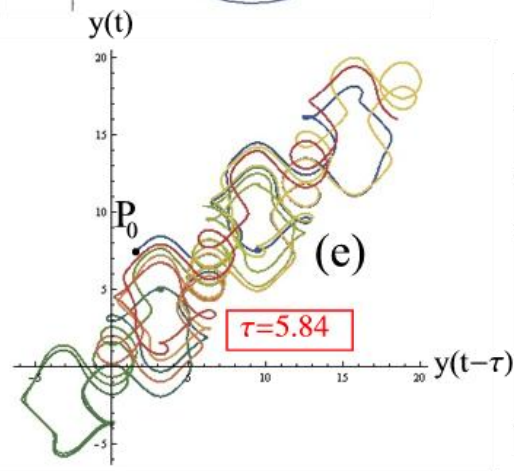
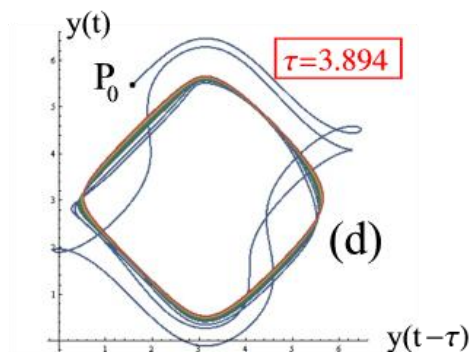
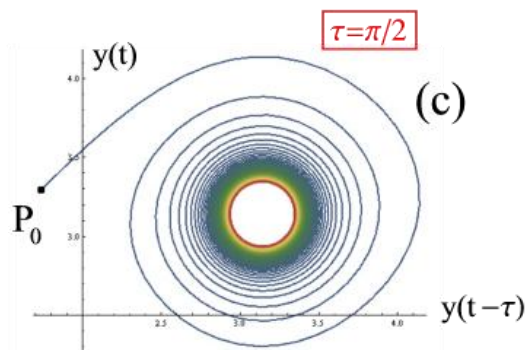
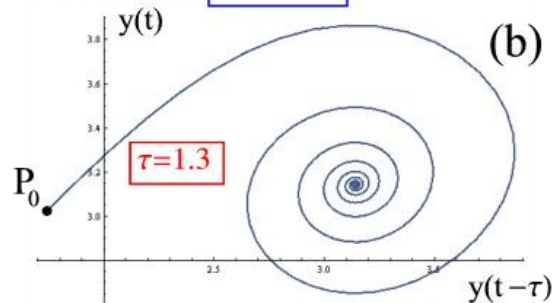
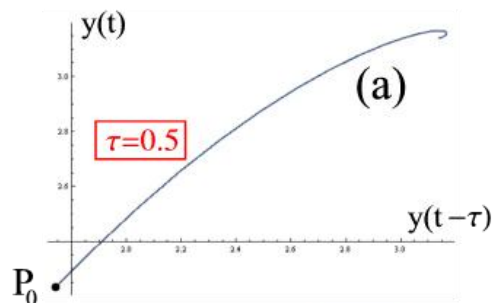
3-RETOUR SUR LA DYNAMIQUE D'IKEDA

-Les points fixes sont $y^* = k\pi, k \in \mathbb{N}$

-La stabilité des points fixes est liée à la valeur des multiplicateurs de ces points. La stabilité est illustrée par l'orientation des trajectoires du diagramme des phases.

- Les points ● sont stables pour $\{\pi, 3\pi, 5\pi, \dots\}$. Les points ● sont instables pour $\{0, 2\pi, 4\pi, \dots\}$.

EDR de forme Ikeda-Matsumoto: $\dot{y} = \sin y_\tau$



3. RETOUR SUR LA DYNAMIQUE D'IKEDA (SUITE)

Dynamique complexe d'une EDR simple de forme Ikeda-Matsumoto pour différentes valeurs du retard, dans l'espace des phases des Figs. (a-e).

- Les Figs. (a-b) montrent une convergence monotone vers un nœud en (a), puis une convergence oscillatoire vers un foyer en (b).

- Les Figs. (c-d) montrent une convergence oscillatoire vers un cycle limite en (c) puis vers deux orbites fermées en (d).

- Les Figs. (e-f) montrent un chaos d'après le diagramme des phases en (e) et l'évolution temporelle correspondante de l'état en (f) pour une valeur plus élevée du retard, proche de 6.



CONTENU

9

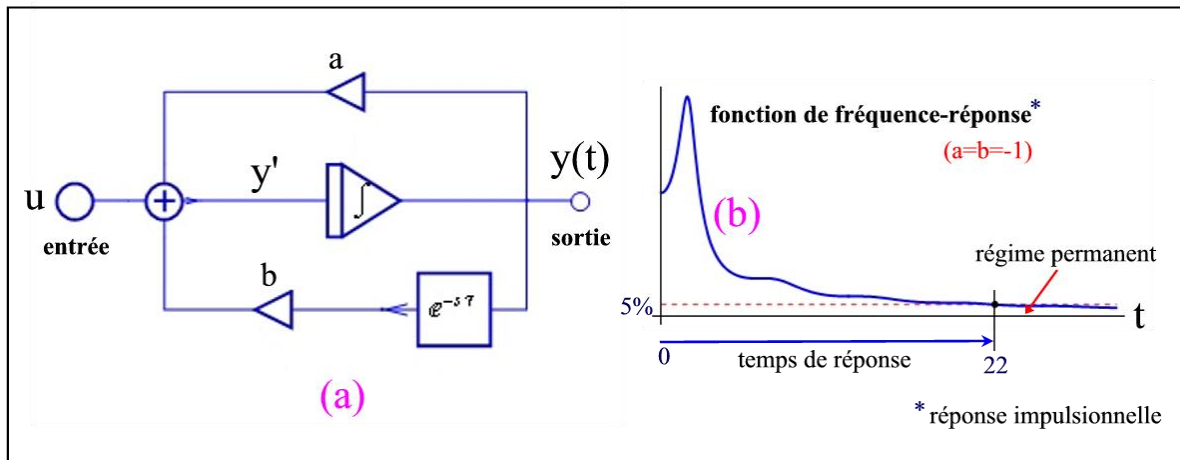
1. Modélisation des équations différentielles à retards
2. Stabilité des modèles continus à retards
3. Dynamique économique continue à retards

- **Solutions:** Soit l'EDR scalaire non linéaire à retard unité, dont le seul équilibre est l'origine

$$y' = a y(t) + f(y(t-1)), f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(0) = 0$$

La linéarisation autour de l'équilibre donne l'équation EDR de forme Frisch-Holme

$$y' = ay(t) + by(t-1), b \equiv f'(y(t-1))|_0$$



1. MODÉLISATION DES EDRS

- Prototype d'EDR dans les modèles économiques, l'EDR de forme Frisch-Holme est définie comme l'**approximation linéaire** d'une EDR plus générale et d'usage technique courant.

- pour un **retard non-unitaire** avec $f(y(t-\tau))$, un nouveau paramétrage permet d'avoir :

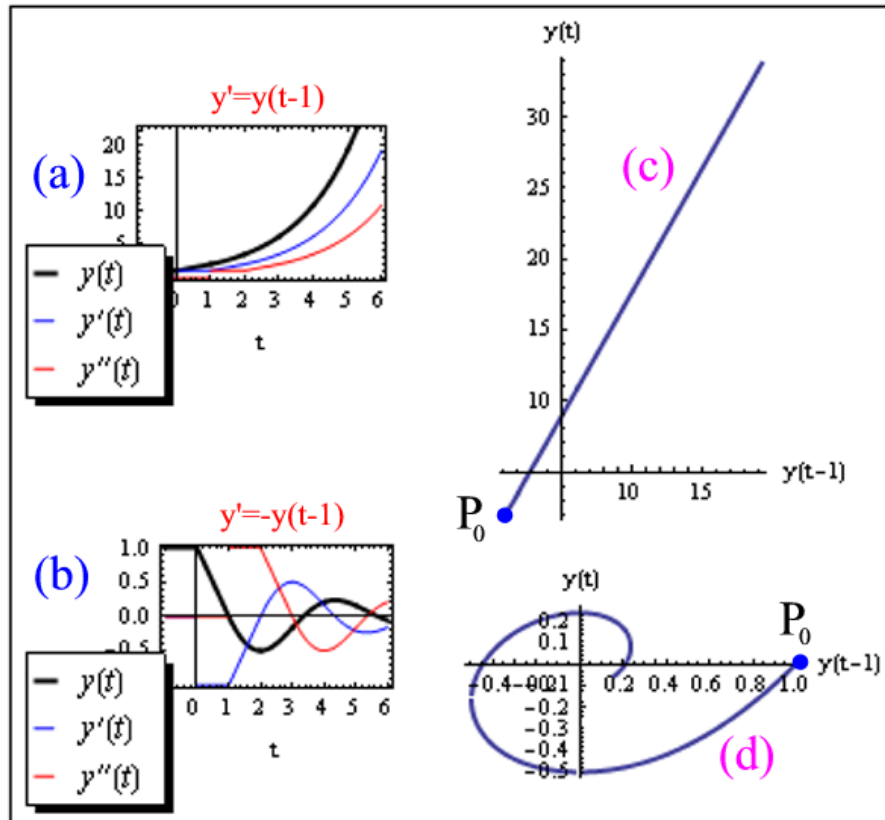
- $\tau f(y(t-1))$, l'espace de la variable d'état étant indépendante du retard.

- Le **schéma fonctionnel (a)** montre les deux feedbacks dont celui du retard. Dans ce cas particulier, une impulsion unité s'applique à l'entrée, pour illustrer une réponse impulsionnelle du système.

- la **fonction de fréquence réponse (b)** montre la convergence rapide obtenue pour $a=b=-1$, avec une entrée en régime permanent à l'époque 22 pour une tolérance de 5% de l'amplitude totale du mouvement.

- **Solutions:** deux cas d'EDRs simples $y'=y(t-1)$ (1) et $y'=-y(t-1)$ (2) avec la condition initiale $y_0(t)=1, t \in [-1,0]$ illustrent des solutions définies par morceaux. Pour (1), la solution par intervalles est

$$y(t) = \sum_{k=0}^n (t-k)^k / k!, \quad t \in [n, n+1], \quad n \in \mathbb{N}_0$$



2. STABILITÉ DES MODÈLES CONTINUS À RETARDS

- Pour chacune des deux EDRs simples on montre dans une représentation cartésienne de la solution (figures a-b) en termes de niveau, de vitesse et d'accélération, ainsi que le portrait de phase (figures c-d), dans le plan $(y(t-1), y(t))$.

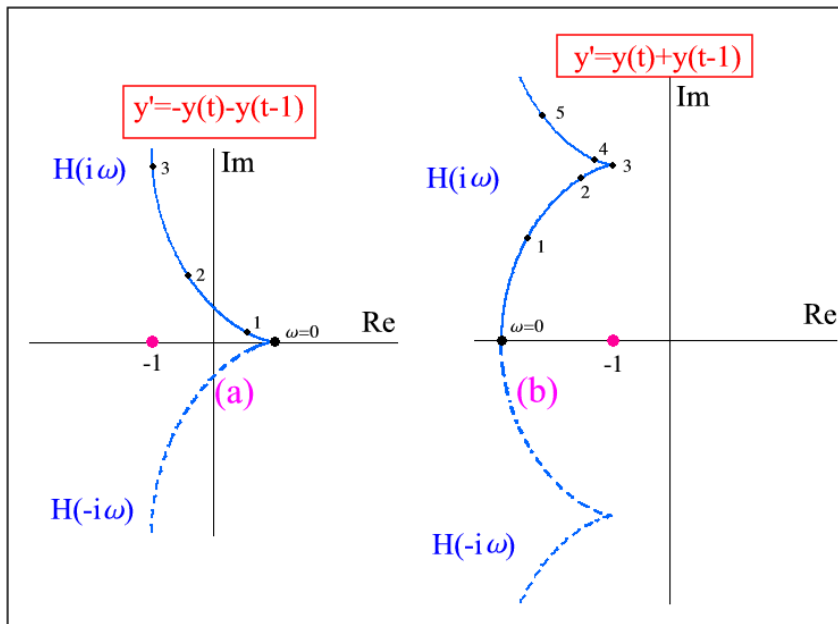
- L'EDR (1) donne une évolution **monotone et divergente**. L'EDR (2), ne différant de (1) que par le signe, donne une évolution contraire **oscillatoire et convergente**. Dans le portrait de phase, l'origine du mouvement est au point P_0 .

- **Stabilité.** Soit l'EDR de forme Frisch-Holme $y' = ay(t) + by(t-\tau)$, $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction de transfert du système à circuit fermé est

$$H_1(s) = s(a + b e^{-\tau s})^{-1}, s \in \mathbb{C}.$$

La fonction de transfert à circuit ouvert est $H(s) = H_1(s) - 1$. On pose $s = \sigma + i\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$.

Théorème de Nyquist: *Un système bouclé est stable si son lieu de transfert en boucle ouverte n'entoure pas le point de coordonnées $(-1, 0)$ dans \mathbb{C} .*



2. STABILITÉ DES EDRS (SUITE 1/2)

-L'EDR de Frisch-Holme décrit un **système bouclé** reliant l'input y à la même variable. La fonction de transfert est obtenue en prenant les transformées de Laplace pour des conditions initiales nulles.

-Le **théorème de Nyquist** prédit un système stable en (a) et un système instable en (b).

- Les courbes $H(i\omega)$ sont orientées dans le sens des entiers non négatifs de ω .

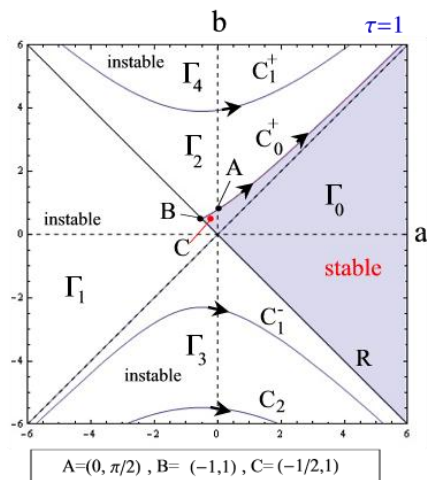
○ **Stabilité:** Soit l'EDR $x'=F(x(t),x(t-\tau))$ dont l'approximation au premier ordre est $y'=-ay(t)-by(t-\tau)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $\tau>0$. L'équation caractéristique est

$D(z)\equiv z+a+be^{-z\tau}=0$. La solution $y(t)=0$ est instable au-delà d'un seuil $\tau>\cos^{-1}(-a/b)/\sqrt{(b^2-a^2)}$. La bifurcation de Hopf introduit un comportement oscillatoire de période $T=2\pi/(\tau\sqrt{(b^2-a^2)})$.

D-partition de l'espace (a,b): pour $\tau=1$ et $\sigma=0$, les coefficients sont des fonctions impaires de ω . On a

$\{a= -\omega \cot \omega, b= \omega \sec \omega\}$. Les singularités $\omega=k\pi$, $k\in\mathbb{N}_\infty$ définissent les intervalles $I_k^- = ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $I_k^+ = (2k\pi, (2k+1)\pi)$ et les courbes

$$C_k^\pm = \{(a,b) = (-\omega \cot \omega, \omega \sec \omega) \mid \omega \in I_k^\pm\}.$$



2. STABILITÉ DES EDRS (SUITE)

- La stabilité est abordée par la **D-partition** de Neimark

- Sur une courbe C_k^\pm une paire est exactement sur l'axe imaginaire. Les courbes sont **orientées** dans le sens des ω croissant. Le point de **rebroussement** B est obtenu par $\lim_{\omega \rightarrow 0} a(\omega) = -1$, $\omega \rightarrow 0$ et $\lim_{\omega \rightarrow 0} b(\omega) = 1$, $\omega \rightarrow 0$.

- L'indice des régions Γ correspond au nombre des racines dans la partie positive du plan \mathbb{C} .

-- La zone ombrée, sans racine positive, désigne la zone de **stabilité** dont la frontière est constituée d'une partie de chaque courbe R et C_0 .

- Les points de chaque hypersurface correspondent à des polynômes exponentiels ayant le même nombre de racines à partie réelle positive.

- La demande globale en (1) est la somme de la consommation C et de l'investissement I . La consommation en (2) est proportionnelle au revenu Y . Les commandes de biens d'équipement en (3) dépendent des décisions passées B depuis $t-\theta$ jusque t (aux bornes de l'intégrale définie). En (4), l'investissement est proportionnel à l'écart séparant le niveau désiré du stock existant de capital physique K . En (5) un délai fixe sépare les commandes des livraisons d'équipement.

- L'équation différentielle retardée en K , déduite du système, est une EDD de forme Frisch-Holme.

○ Equations:

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (1)$$

$$C(t) = cY(t) \quad (2)$$

$$I(t) = \theta^{-1} \int_{t-\theta}^t B(\tau) d\tau \quad (3)$$

$$B(t) = \lambda (vY(t) - K(t)) \quad (4)$$

$$K'(t) = B(t - \theta) \quad (5)$$

○ d'après (3) et (5), en intégrant, on a:

$$I(t) = \theta^{-1} (K(t + \theta) - K(t)) \quad (3b)$$

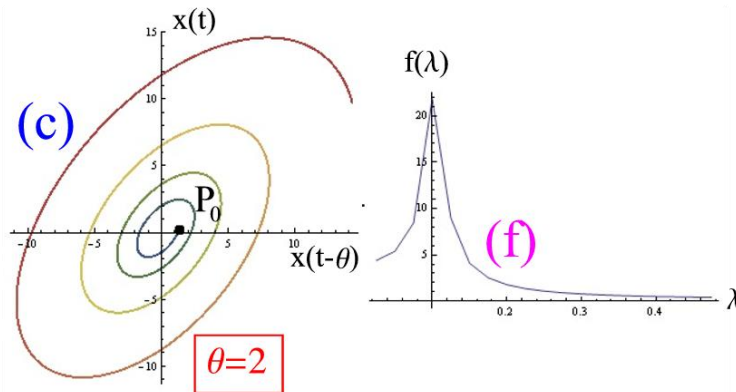
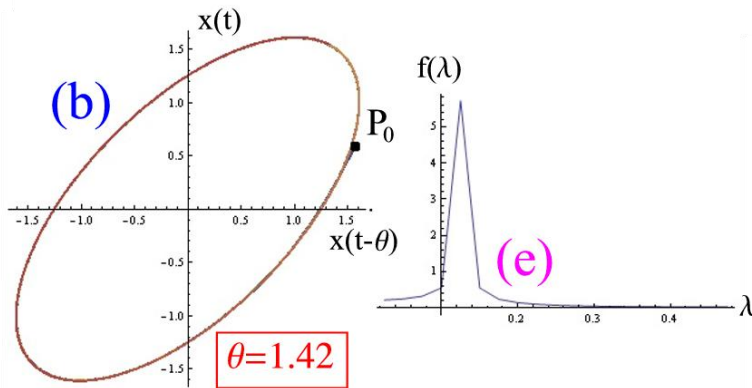
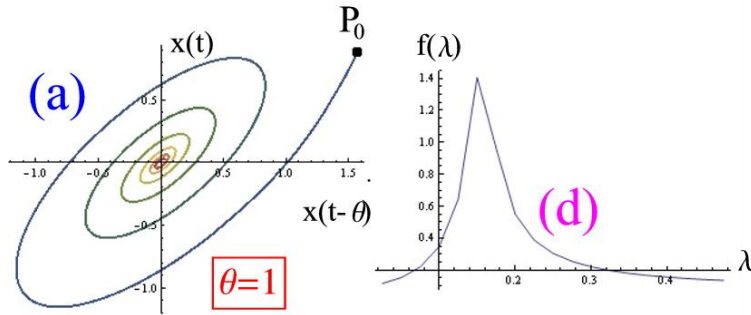
○ Equation dynamique en K:

$$K'(t) = a K(t) - b K(t - \theta)$$

avec $a, b > 0$:

$$a \equiv \lambda v / \theta / (1 - c) \text{ et } b \equiv \lambda (1 + v / \theta / (1 - c)).$$

Modèle de Kalecki



$$\dot{K} = \frac{\lambda v}{\theta(1-c)} K(t) - \lambda \left(1 + \frac{v}{\theta(1-c)}\right) K(t-\theta), \quad K(\theta) = \pi/2 : \theta < 0$$

3 A. DYNAMIQUE DU MODÈLE DE KALECKI (SUITE)

- Les figures montrent, pour chaque valeur du retard θ , le diagramme des phase à gauche (Figs.a-c) et le spectre de puissance à droite (Figs. d-f). Le point initial est signalé par P_0 .

- Les mouvements sont oscillatoires avec un pic aux basses fréquences. La Fig. (b) est un cycle limite. Ce mouvement périodique entretenu est obtenu pour un délai de l'ordre de 18 mois. Le mouvement converge vers la solution stationnaire en zéro (Fig. a) mais s'en éloigne de plus en plus à la Fig. c.

- L'équation dynamique du modèle, dans l'accumulation, est rappelée avec la condition fonctionnelle initiale. Les valeurs de paramètres sont $c=.5$, $v=.6$ et $\lambda=.3$.

-Le modèle correspond à la reformulation (sans retard) de Chang et Smyth (1971)

- Les variables principales Y et K sont des fonctions s implicites du temps continues et dérivables.

- L'équation (1) décrit l'ajustement dynamique à l'équilibre sur le marché des biens. L'équation (2) sur l'accumulation introduit un retard, justifié par la durée d'installation.

- L'investissement est supposé séparable en deux parties, l'une non nec. linéaire $I(Y)$ et l'autre proportionnelle à K .

- On a le système différentiel du premier ordre équivalent:

$$Y' = Z - \int f(u) du$$

$$Z' = -g(Y, Y_{-t})$$

○ Equations du modèle à prix fixes:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = \alpha (I(Y, K) - S(Y, K)), \alpha \in (0, 1] \quad (1) \\ K' = I(Y(t-\tau), K) - \delta K, \tau > 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

○ Equation dynamique:

d'après la séparation $I(Y, K) = I(Y) - \beta K$ et la seule proportionnalité $S(Y) = \gamma Y$, on obtient une EDD du second ordre :

$$Y'' + f(Y)Y' + g(Y, Y(t-\tau)) = 0,$$

où $f(Y) \equiv -\alpha I'_Y + \beta + \delta + \alpha\gamma$ et

$$g(Y, Y(t-\tau)) \equiv \alpha\beta I(Y(t-\tau)) - \alpha(\beta + \delta)I(Y) + \alpha\gamma(\beta + \delta)Y.$$

Le système différentiel équivalent du premier ordre est

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = X \\ X' = -a_0(Y) X - b_0 Y + c_0 I(Y) - d_0 I(Y(t-\tau)) \end{array} \right.$$

où $a_0(Y) \equiv -\alpha I'_Y(Y) + \beta + \delta + \alpha\gamma$; $b_0 \equiv \alpha\gamma(\beta + \delta)$; $c_0 \equiv \alpha(\beta + \delta)$; $d_0 \equiv \alpha\beta$.

o Voisinage d'un point fixe

Par linéarisation au voisinage de l'équilibre stationnaire $(0, Y^*)$, et changement de l'origine en ce point $(x=X, y=Y-Y^*)$, le système différentiel prend la forme matricielle

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}_0 \mathbf{u} + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}(t-\tau), \quad \mathbf{u}^T = (y, x)$$

soit

$$\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 \equiv -\alpha I'_y|_{(0,0)} + \beta + \delta + \alpha \gamma;$$

$$\mathbf{b}_1 \equiv \alpha(\beta + \delta)(\gamma - I'_y|_{(0,0)}); \quad \mathbf{d}_1 \equiv \alpha \beta I'_y|_{(0,0)}.$$

L'équation caractéristique exprime un polynôme de la valeur propre λ , dont l'exponentielle provient du retard:

$$|\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 e^{-\lambda \tau} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad \text{soit} \quad \lambda^2 + \mathbf{a}_1 \lambda + \mathbf{b}_1 + \mathbf{d}_1 e^{-\lambda \tau} = 0$$

Le système étant autonome, l'équilibre ne dépend pas du retard.

-Après linéarisation, les paramètres composites indicés par 0 sont modifiés par des paramètres indicés par 1.

- L'équilibre de point fixe est stable ssi toutes les racines λ ont leur partie réelle négative.

- Le point fixe modifie sa stabilité lorsque $\text{Re } \lambda = 0$.

○ Stabilité locale

On suppose la **fonction d'investissement linéaire**, soit

$$I(Y, K) = \eta Y - \beta K, \quad \eta, \beta > 0$$

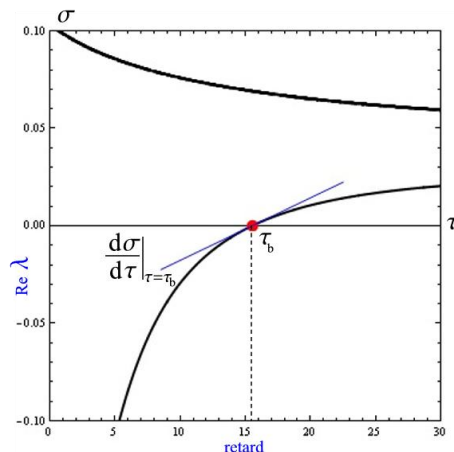
En posant la valeur propre $\lambda = \sigma + i\omega$, on obtient le système équivalent de l'équation caractéristique

$$\sigma^2 - \omega^2 + a_1 \sigma + b_1 + d_1 e^{-\sigma\tau} \cos \omega\tau = 0 \quad (1)$$

$$2\sigma\omega + a_1\omega - d_1 e^{-\sigma\tau} \sin \omega\tau = 0 \quad (2)$$

$$a_1 \equiv -\alpha\eta + \beta + \delta + \alpha\gamma; \quad b_1 \equiv -\alpha(\beta + \delta)(\eta - \gamma); \quad d_1 \equiv \alpha\beta\eta.$$

L'application numérique pour $\alpha = .25, \beta = .5, \eta = .3, \gamma = \delta = .1$ montre **que les conditions de Hopf étendues** à un système à retard sont satisfaites: changement de signe de σ et pente positive au premier point de bifurcation de cycle limite $\tau_b = 15.5$.



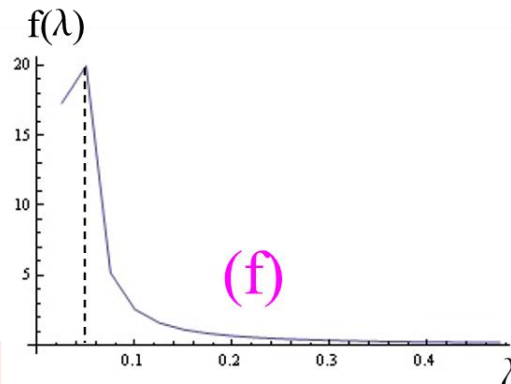
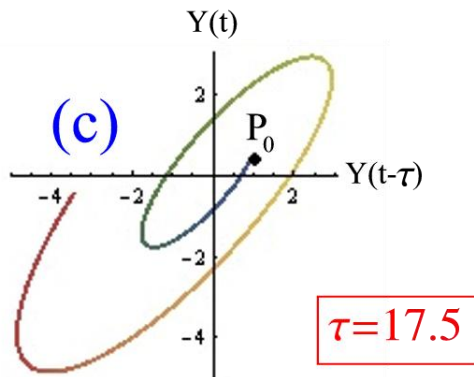
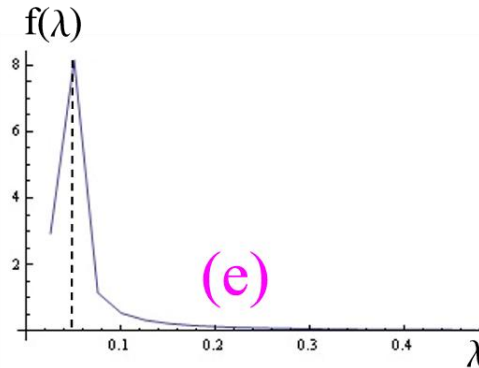
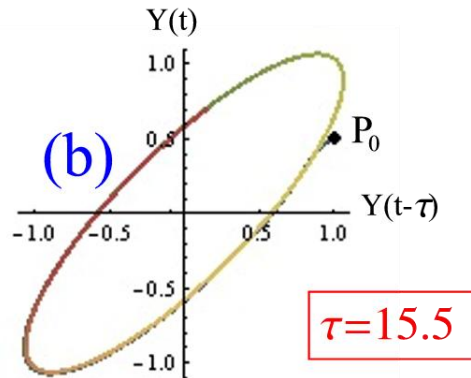
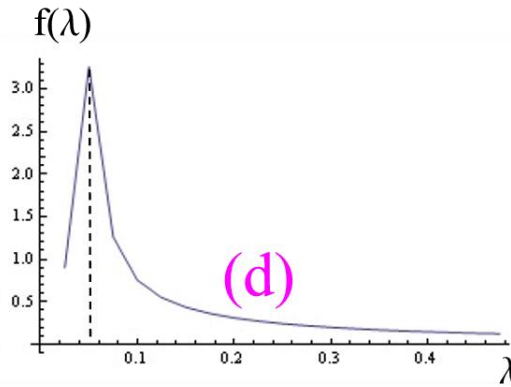
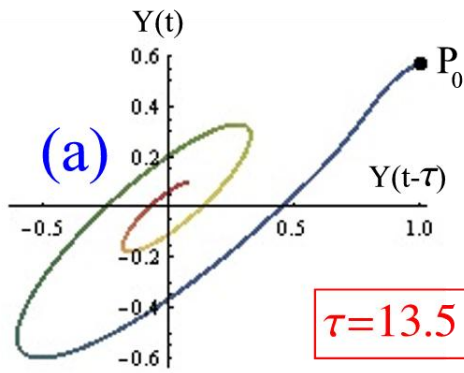
-Le système est obtenu en séparant partie réelle et partie imaginaire. Il est résolu manuellement:
expression de ω d'après (1), report en (2), résolution d'une équation quadratique en $\cos y$ avec $y = \omega\tau$, et report de la valeur de y .

- La pente au point $\sigma = 0$ est obtenue par application d'un théorème des fonctions implicites à $f(\sigma, \tau) = 0$.

- Les autres bifurcations se déduisent de la propriété

$\omega\tau = \omega_b\tau_b + k2\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la deuxième bifurcation est de 184, la troisième de 521, etc.

Modèle linéaire de Kaldor avec retard



3B-MODÈLE DE KALDOR AVEC RETARD (SUITE3/3)

- Les Figures montrent la dynamique du **modèle de Kaldor linéaire** pour chaque valeur du retard τ le diagramme des phases (Figs. a-c) et le spectre de puissance correspondant (Figs. d-f).

CONCLUSIONS

○ Le principe des délais et avances en économie:

- l'origine des délais (hypothèse de durée de vie finie) et avances (hypothèse d'absence d'altruisme entre générations et anticipations parfaites) ; la relation retards-cycle .
- approche économique des délais de production (Time-to-build): formalisation de la théorie de Jevons; théorie endogène du cycle; modèles à générations.
- utilisant la méthode des systèmes dynamiques et la théorie de la bifurcation: généralisation des théorèmes et critères de stabilité à l'étude des systèmes différentiels à retards.

○ La contribution des retards à l'étude des dynamiques complexes:

- formalisation des retards et leurs conséquences qualitatives. L'espace des phases étant de dimension infinie, on peut prévoir tous les types de comportements dynamiques (monotonie, oscillations et chaos)
- le retard comme paramètre de bifurcation.
- modes de stabilité selon l'importance des retards.
- l'application à des modèles économiques de fluctuations et de croissance, à retards constant ou variables: modèle du cycle des affaires de Kalecki, modèle de Kaldor, modèle de croissance cyclique de Goodwin, modèle d'accumulation de Jarsulic, modèle IS-LM, modèle de croissance de Solow, modèles walrasiens de marché, modèle de produits, etc.

○ Une conciliation des représentations du temps en modélisation:

- conciliation des approches du temps en modélisation à l'instar d'autres domaines scientifiques : mécanique, automatique, chimie cinétique, biologie, médecine, écologie.
- coexistence, dans un même modèle, d'une formalisation en temps continu et en temps discret.
- approche fonctionnelle (d'argument variable) des équations différentielles, approche système, domaine du temps/domaine des fréquences.
- Le développement récent des logiciels mathématiques; l'introduction de l'incertitude (équations aux différences différentielles stochastiques).