Université de Paris et Université Paris 1

Master 2 MO 2023 – 2024

Analyse des séries financières

Examen final, Février 2024

3h00, sans aucun document, sauf une feuille A4

Exercice 1 (4 points)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux séries chronologiques indépendantes. On considère pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $Z_t = X_t\, Y_t$.

1. Démontrer que si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaires, alors $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire **(1pt)**.

2. On suppose que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaires d'ordre 2. Démontrer que $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire d'ordre 2 **(1pt)**. Si on enlève l'hypothèse d'indépendance entre $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, montrer que $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est plus forcément stationnaire d'ordre 2 **(2pts)**.

Exercice 2 (15 points)

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires centrées indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}\left[\varepsilon_0^2\right] = 1$. Soit la série chronologique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \big(\varepsilon_t - b\,\varepsilon_{t-1}\big)\sigma_t \quad \text{où} \quad \sigma_t = \sqrt{a_0 + a_1\, X_{t-2}^2} \tag{1}$$

avec $|b| < 1$, $a_0 > 0$ et $0 < a_1 < 1$.

1. Soit $v_t = \varepsilon_t - b\,\varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Quel type de processus est la série chronologique $(v_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **(0.5pts)**? Déterminer l'autocovariance de (v_t) **(0.5pts)**.

2. Montrer que si (X_t) vérifie (1) alors:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} a_1^k \prod_{j=1}^{k} v_{t-2j}^2\Big) + a_1^{n+1}\,\sigma_{t-2(n+1)}^2 \prod_{j=1}^{n+1} v_{t-2j}^2 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \ \textbf{(1pt)}.$$

   En déduire que si $\mathbb{E}\left[\log(v_0^2)\right] < -\log(a_1)$ alors il existe presque sûrement une unique solution stationnaire causale à l'équation (1) dont on donnera l'expression **(3pts)**. Si (ε_t) suit une loi de Rademacher (-1 avec probabilité 1/2 et 1 avec probabilité 1/2), que devient cette condition en fonction de b et de a_1 **(1pt)**?

3. Démontrer que l'équation (1) admet une solution stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $(1 + b^2)\,a_1 < 1$ **(1.5pts)**. Dans le cas où (ε_t) suit une loi de Rademacher, comparez avec la condition précédente et conclure **(0.5pts)**?

4. On suppose désormais que $(1+b^2)\,a_1<1$ et soit (X_t) la solution stationnaire de (1). Déterminer l'espérance et la variance de X **(1pt)**. Démontrer que si $b\neq 0$ alors (X_t) n'est pas un bruit blanc faible **(1pt)**.

5. On suppose une trajectoire observée $(X_1,\ldots,X_n)$ où n est suffisamment grand et on suppose que le vecteur de paramètre $\theta = {}^t(b,a_0,a_1)$ est inconnu. En supposant le bruit (ε_t) gaussien, déterminer la log-densité de X_t conditionnellement à la tribu engendrée par $(X_{t-k})_{k\geq 2}$ **(0.5pts)**. Si n est impair, en déduire la quasi-log vraisemblance gaussienne du modèle calculée à partir de $(X_1,X_3,X_5,\ldots,X_n)$ **(0.5pts)**. Expliquer pourquoi cela ne permet pas d'estimer θ **(1pt)**.

6. A partir de l'équation (1), donner l'expression de ε_t en fonction de $(X_{t-k})_{k\geq 0}$ **(1pt)** et en déduire l'écriture de (X_t) comme un processus affine causal **(1pt)**. En déduire l'espérance et la variance conditionnelle de X_t par rapport à $(X_{t-k})_{k\geq 1}$ **(1pt)**. En déduire également l'expression exacte de l'estimateur par quasi-maximum de vraisemblance de θ calculé à partir de $(X_1,\ldots,X_n)$ **(1pt)**.

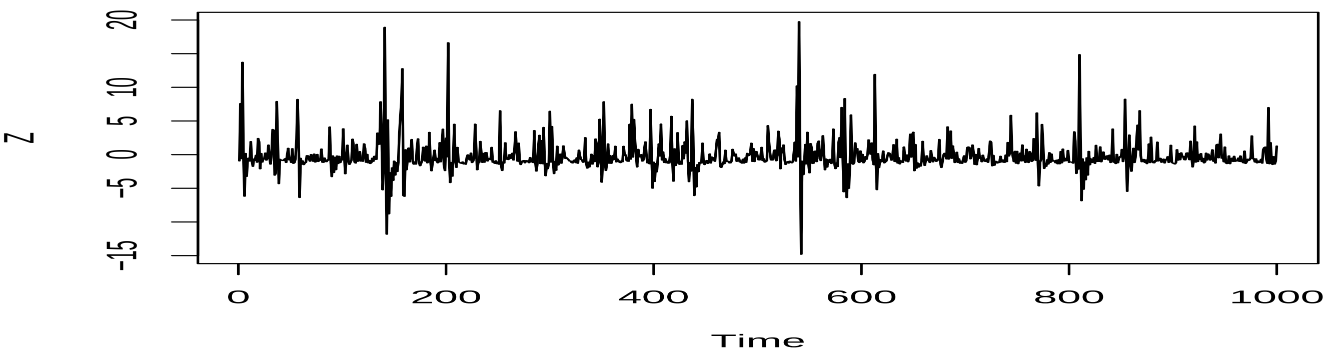
Exercice d'application du logiciel `R` (5 points)

Afin de trouver un modèle pour les log-rendements d'un indice financier, on effectue des simulations:

1. On exécute les commandes `R` suivantes:

```
n=1000; m=100; u=rnorm(n+m,0,1)
X=rep(0,n+m); Z=0
for (i in c(3:(n+m)))
{X[i]=(u[i]^2-1)*(1+0.6*X[i-2]^2)^0.5}
Z[1:n]=X[((m+1):(m+n))]
ts.plot(Z)
```

On obtient le graphe suivant:



Question 1: Quelle trajectoire de processus a-t-on simulé? A quoi sert `m`*? Expliquez pourquoi il semble y avoir plus de pics positifs que négatifs* **(1.5pts)**.

2. On exécute alors:

```
Box.test(Z, lag = 10)
acf(Z^2)[1]; acf(Z^2)[2]
```

Avec pour résultats numériques:

```
Box-Pierce test

data:  Z
X-squared = 13.763, df = 10, p-value = 0.1841

Autocorrelations of series ?Z^2?, by lag

    1
0.004

    2
0.524
```

Question 2: Pouvait-on s'attendre à ces résultats **(1.5pts)** *?*

3. On exécute alors:

```
logLik=function(the){sum(log(the[1]+the[2]*X[2:(n-1)]^2+the[3]*X[1:(n-2)]^2)
         +X[3:n]^2/(the[1]+the[2]*X[2:(n-1)]^2+the[3]*X[1:(n-2)]^2))}
QMLE=optim(c(1,0.1,0.1),logLik,method = "L-BFGS-B",lower = c(0.001,0,0),
         upper = c(100,0.99,0.99))
QMLE$par
```

Avec pour résultats numériques:

```
 > QMLE$par
[1] 2.2852583 0.0469307 0.9057873
```

Question 3: Expliquer ce qui a été fait et les résultats obtenus. Pouvait-on s'attendre à cela **(2pts)** *?*