Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2025 − 2026

Econométrie II

Contrôle continu n°2, avril 2026

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice théorique (Sur 16 points)

Soit $0 \leq p \leq n$ et on suppose que l'on a observé $(Y_1, \dots, Y_n)$, qui s'écrit

$$Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_i^{(1)} + \cdots + \theta_p X_i^{(p)} + \varepsilon_i \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n,$$

où on a observé la famille de réels $X = (X_i^{(j)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ avec rang(X) $= p+1$ et on note le paramétre inconnu $\theta = (\theta_j)_{0 \leq j \leq p} \in \mathbf{R}^{p+1}$. Enfin, $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées telles qu'il existe $\sigma^2 > 0$, inconnu, et $0 \leq K \leq n$, $(n_1, \dots, n_K) \in \{1, \dots, n\}^K$ connus vérifiant:

$$\mathrm{var}(\varepsilon_i) = k\, \sigma^2 \qquad \text{pour } n_0 + \cdots + n_{k-1} + 1 \leq i \leq n_0 + \cdots + n_k \text{ et } 1 \leq k \leq K$$

avec $n_0 = 0$ et $n_0 + \cdots + n_K = n$.

1. Ecrire le modèle suivi par $Y = {}^t\big(Y_1, \dots, Y_n\big)$ sous forme matricielle **(0.5pts)**. Déterminer les matrices de variance-covariance de $\varepsilon = {}^t\big(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\big)$ et de Y **(1pt)**.

2. Déterminer la vraisemblance de Y par rapport aux paramètres inconnus θ et σ^2 **(1pt)**. En déduire que l'estimateur par maximum de vraisemblance de (θ, σ^2) est $(\widehat{\theta}, \widehat{\sigma}^2)$ qui vérifie:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \widehat{\theta} & = & \displaystyle\operatorname*{argmin}_{\theta \in \mathbf{R}^{p+1}} \Big\{ {}^t\big(Y - X\,\theta\big)\, \Omega^2 \,\big(Y - X\,\theta\big) \Big\} \\ \widehat{\sigma}^2 & = & \dfrac{1}{n}\, {}^t\big(Y - X\,\widehat{\theta}\big)\, \Omega^2 \,\big(Y - X\,\widehat{\theta}\big) \end{array} \right. ,$$
où Ω est une matrice que l'on précisera **(2.5pts)**.

3. Montrer que $\widehat{\theta} = \big({}^tX\,\Omega^2\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,\Omega^2\,Y$ après avoir expliqué pourquoi ${}^tX\,\Omega^2\,X$ est inversible **(1pt)**. Déterminer la loi de $\widehat{\theta} = {}^t\big(\widehat{\theta}_0, \dots, \widehat{\theta}_p\big)$ **(0.5pts)**. En déduire la loi de $\widehat{\theta}_j$ **(0.5pts)**.

4. On considère $\widetilde{\theta}$ l'estimateur par moindres carrés ordinaires de θ. Déterminer la loi de $\widetilde{\theta}$ **(0.5pts)** et comparer son risque quadratique avec celui de $\widehat{\theta}$ **(1.5pts)**.

5. On note $\widetilde{X} = \Omega\, X$. Montrer que $n\,\widehat{\sigma}^2 = \big\|\big(I_n - \widetilde{X}\,\big({}^t\widetilde{X}\,\widetilde{X}\big)^{-1}\,{}^t\widetilde{X}\big)\,\Omega\,\varepsilon\big\|^2$ **(0.5pts)**. En déduire la loi de $\widehat{\sigma}^2$ **(1pt)** ainsi qu'un estimateur $\widetilde{\sigma}^2$ de σ^2 non biaisé, dont on précisera également la loi **(0.5pts)**.

6. Soit le problème de test: H_0: $\theta_1 = 0$ contre H_1: $\theta_1 \neq 0$. Déduire des questions précédentes une statistique de test $\widehat{T}_1$ dont on précisera la loi sous H_0 **(2pts)**.

7. On suppose que $K = 2$ et $1 < n_1 < n$ inconnu. Reprendre la vraisemblance de Y avec θ, σ^2 et n_1 comme paramètre et en déduire que
$$\widehat{n}_1 = \operatorname*{argmin}_{1 < n_1 < n} \Big\{ 2^{-\frac{n_1}{n}} \Big(\sum_{i=1}^{n_1} \big(Y_i - \big(X_i^{(j)}\big)_{0 \leq j \leq p} \widehat{\theta}(n_1)\big)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=n_1+1}^{n} \big(Y_i - \big(X_i^{(j)}\big)_{0 \leq j \leq p} \widehat{\theta}(n_1)\big)^2 \Big) \Big\} \quad \textbf{(3pts)}.$$

Proof. 1. On pose
$$Y = {}^t(Y_1, \dots, Y_n), \quad \theta = {}^t(\theta_0, \dots, \theta_p),$$
Alors le modèle s'écrit : $Y = X\theta + \varepsilon$.
La matrice de variance-covariance de ε est
$$\mathrm{cov}(\varepsilon) = \sigma^2\, D, \quad \text{où } D \text{ est diagonale,} \quad D = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2}, \dots, \underbrace{K, \dots, K}_{n_K}).$$
On a également $\mathrm{cov}(Y) = \Sigma = \sigma^2 D$.

2. La loi de Y est $\mathcal{N}\big(X\,\theta\,,\,\sigma^2\,D\big)$, et comme D est inversible on a donc
$$L(\theta,\sigma^2)=(2\pi\,\sigma^2)^{-n/2}(\det D)^{-1/2}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,D^{-1}\,(Y-X\,\theta)\Big).$$
Si on pose $\Omega=D^{-1/2}=\operatorname{diag}\big(\underbrace{1,\dots,1}_{n_1},\underbrace{2^{-1/2},\dots,2^{-1/2}}_{n_2},\dots,\underbrace{K^{-1/2},\dots,K^{-1/2}}_{n_K}\big)$, et $\Omega^2=D^{-1}$, alors
$$(\widehat{\theta},\widehat{\sigma}^2)=\operatorname*{argmax}_{\theta\in\mathbf{R}^{p+1},\sigma^2>0}\ \ln\big(L(\theta,\sigma^2)\big)=\operatorname*{argmin}_{\theta\in\mathbf{R}^{p+1},\sigma^2>0}\ \big\{-2\,\ln\big(L(\theta,\sigma^2)\big)\big\}.$$
Comme $-2\,\ln\big(L(\theta,\sigma^2)\big)=n\,\ln(2\pi\,\sigma^2)-\ln\big(\det(\Omega^2)\big)+\dfrac{1}{\sigma^2}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Omega^2\,(Y-X\,\theta)$, alors on en déduit que
$$\widehat{\theta}=\arg\min_{\theta\in\mathbf{R}^{p+1}}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Omega^2\,(Y-X\,\theta).$$
Par ailleurs, si on dérive par rapport à σ^2 la fonction $-2\,\ln\big(L(\theta,\sigma^2)\big)$ pour obtenir un éventuel extremum alors $\frac{n}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma^4}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Omega^2\,(Y-X\,\theta)=0$, soit $\sigma^2=\frac{1}{n}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Omega^2\,(Y-X\,\theta)$. Si on dérive 2 fois, on a $-\frac{n}{\sigma^4}+\frac{2}{\sigma^6}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Omega^2\,(Y-X\,\theta)$, donc au point tel que $\sigma^2=\frac{1}{n}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Omega^2\,(Y-X\,\theta)$ on obtient $\frac{n}{\sigma^4}>0$: c'est bien un maximum. Au final, on obtient:
$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Omega^2\,(Y-X\,\theta).$$

3. On peut utiliser ce que l'on sait d'un estimateur par MCG: si $\widehat{\theta}=\arg\min_{\theta\in\mathbf{R}^{p+1}}\,{}^t(Y-X\,\theta)\,\Sigma^{-1}\,(Y-X\,\theta)$ avec Σ matrice inversible, alors $\widehat{\theta}=\big({}^tX\,\Sigma^{-1}\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,\Sigma^{-1}\,Y$ car on sait que ${}^tX\,\Sigma^{-1}\,X$ est inversible. En remplaçant Σ^{-1} par Ω^2, ce qui est possible car $\det(\Omega^2)>0$, on en déduit donc $\widehat{\theta}=\big({}^tX\,\Omega^2\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,\Omega^2\,Y$.
Comme ε est un vecteur gaussien, alors Y est aussi un vecteur gaussien et en utilisant les résultats connus des MCG, on obtient que $\widehat{\theta}\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ \mathcal{N}\big(\theta\,,\,\sigma^2\,\big({}^tX\,\Omega^2\,X\big)^{-1}\big)$.
Enfin, on obtient directement $\widehat{\theta}_j\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ \mathcal{N}\big(\theta\,,\,\sigma^2\,\big[\big({}^tX\,\Omega^2\,X\big)^{-1}\big)\big]_{j+1,j+1}\big)$.

4. On a $\widetilde{\theta}=\big({}^tX\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,Y=\theta+\big({}^tX\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,\varepsilon$. Donc $\widetilde{\theta}$ est un vecteur gaussien et on a
$$\widetilde{\theta}\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ \mathcal{N}\big(\theta\,,\,\sigma^2\,\big({}^tX\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,\Omega^{-2}X\,\big({}^tX\,X\big)^{-1}\big).$$
Le risque quadratique de $\widetilde{\theta}$ est $R(\widetilde{\theta})=\mathbb{E}\big[\|\widetilde{\theta}-\theta\|^2\big]=\sigma^2\,\operatorname{Trace}\Big(\big({}^tX\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,\Omega^{-2}X\,\big({}^tX\,X\big)^{-1}\Big)$. Mais comme $\widehat{\theta}$ est l'estimateur MCG de θ, on sait par le théorème de Gauss-Markov que $\operatorname{cov}(\widehat{\theta})\le\operatorname{cov}(\widetilde{\theta})$ au sens de la relation d'ordre entre matrices symétriques, d'où $\operatorname{Trace}\big(\operatorname{cov}(\widehat{\theta})\big)\le\operatorname{Trace}\big(\operatorname{cov}(\widetilde{\theta})\big)$, donc $R(\widehat{\theta})\le R(\widetilde{\theta})$.

5. On pose $\widetilde{X}=\Omega\,X$, $\widetilde{Y}=\Omega\,Y$. Alors $\widetilde{Y}=\widetilde{X}\theta+\Omega\,\varepsilon$, $\quad\Omega\varepsilon\sim\mathcal{N}(0\,,\,\sigma^2\,I_n)$. Et après de simples calculs, on obtient bien que $\widehat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\,\big\|\big(I_n-\widetilde{X}\,\big({}^t\widetilde{X}\,\widetilde{X}\big)^{-1}\widetilde{X}\big)\Omega\,\varepsilon\big\|^2$.
On déduit de cela que $\widehat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\,\big\|P_{[\widetilde{X}]^\perp}\,\Omega\,\varepsilon\big\|^2$, où $P_{[\widetilde{X}]^\perp}$ est la projection orthogonale sur $[\widetilde{X}]^\perp$. Et ainsi d'après le Théorème de Cochran, $\widehat{\sigma}^2\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ \dfrac{\sigma^2}{n}\,\chi^2_{n-p-1}$.
Un estimateur non biaisé de σ^2 est donc $\widetilde{\sigma}^2=\dfrac{n}{n-p-1}\,\widehat{\sigma}^2$ et on a ainsi $\widetilde{\sigma}^2\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ \dfrac{\sigma^2}{n-p-1}\,\chi^2_{n-p-1}$.

6. On peut écrire que $\widehat{\theta}_1=C\,\widehat{\theta}$ avec $C=(0,1,0,\dots,0)$. On a ainsi $\widehat{\theta}_1$ qui est une variable gaussienne et on obtient que
$$\widehat{\theta}_1\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ \mathcal{N}\big(C\,\theta\,,\,\sigma^2\,C\,\big({}^tX\,\Omega^2\,X\big)^{-1}\big)\,{}^tC\big)\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\widehat{\theta}_1}{\sqrt{\sigma^2\,C\,\big({}^tX\,\Omega^2\,X\big)^{-1}\big)\,{}^tC}}\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ \mathcal{N}(0\,,\,1)\quad\text{sous } H_0.$$
On peut aussi écrire que $\widehat{\theta}=\theta+\big({}^t\widetilde{X}\,\widetilde{X}\big)^{-1}\,\widetilde{X}\,P_{[\widetilde{X}]}\,\Omega\,\varepsilon$. Donc d'après Cochran, $\widehat{\theta}$ et $\widetilde{\sigma}^2$ sont indépendantes. On en déduit que
$$\widehat{T}_1=\frac{\widehat{\theta}_1}{\widetilde{\sigma}^2\,\sqrt{C\,\big({}^tX\,\Omega^2\,X\big)^{-1}\big)\,{}^tC}}\ \overset{\mathcal{L}}{\sim}\ t(n-p-1)\quad\text{sous } H_0.$$

7. Pour $K=2$, on a $D(n_1)=\operatorname{diag}\big(\underbrace{1,\dots,1}_{n_1},\underbrace{2,\dots,2}_{n-n_1}\big)$. La vraisemblance vaut alors:
$$L(\theta,\sigma^2,n_1)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\frac{1}{(\sigma^2)^{n_1/2}}\,\frac{1}{(2\sigma^2)^{(n-n_1)/2}}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n_1}\big(Y_k-(X_k^{(j)})_{0\le j\le p}\,\theta\big)^2+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=n_1+1}^{n}\big(Y_k-(X_k^{(j)})_{0\le j\le p}\,\theta\big)^2\Big)\Big)$$
donc la log-vraisemblance vaut:
$$\ell(\theta,\sigma^2,n_1)=-\frac{n}{2}\,\big(\log(2\pi)+\log(\sigma^2)\big)-\frac{n-n_1}{2}\,\log(2)-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\sum_{k=1}^{n_1}\big(Y_k-(X_k^{(j)})_{0\le j\le p}\,\theta\big)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=n_1+1}^{n}\big(Y_k-(X_k^{(j)})_{0\le j\le p}\,\theta\big)^2\Big)$$
En minimisant $-2\times\ell(\theta,\sigma^2,n_1)$ en (θ,σ^2,n_1), et en reprenant la question 3, on s'aperçoit qu'alors $\widehat{\theta}$ dépend de n_1 et donc:
$$\widehat{\theta}(n_1)=\operatorname*{argmin}_{\theta\in\mathbf{R}^{p+1}}\Big\{\sum_{k=1}^{n_1}\big(Y_k-(X_k^{(j)})_{0\le j\le p}\,\theta\big)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=n_1+1}^{n}\big(Y_k-(X_k^{(j)})_{0\le j\le p}\,\theta\big)^2\Big\}=\big({}^tX\,\Omega^2(n_1)\,X\big)^{-1}\,{}^tX\,\Omega^2(n_1)\,Y$$
En ce qui concerne σ^2, le même raisonnement qu'à la question 2 implique:
$$\widehat{\sigma}^2(n_1)=\frac{1}{n}\,{}^t(Y-X\,\widehat{\theta}(n_1))\,\Omega^2(n_1)\,(Y-X\,\widehat{\theta}(n_1)).$$
Enfin, en minimisant $-2\times\ell(\widehat{\theta}(n_1),\widehat{\sigma}^2(n_1),n_1)$, on obtient:
$$\widehat{n}_1=\operatorname*{argmin}_{1<n_1<n}\big\{n\,\log\big(\widehat{\sigma}^2(n_1)\big)-n_1\,\log(2)\big\}$$
d'où le résultat en divisant par n et en prenant l'exponentielle.

$\square$

Exercice de TP utilisant le logiciel `R` (Sur 7 points)

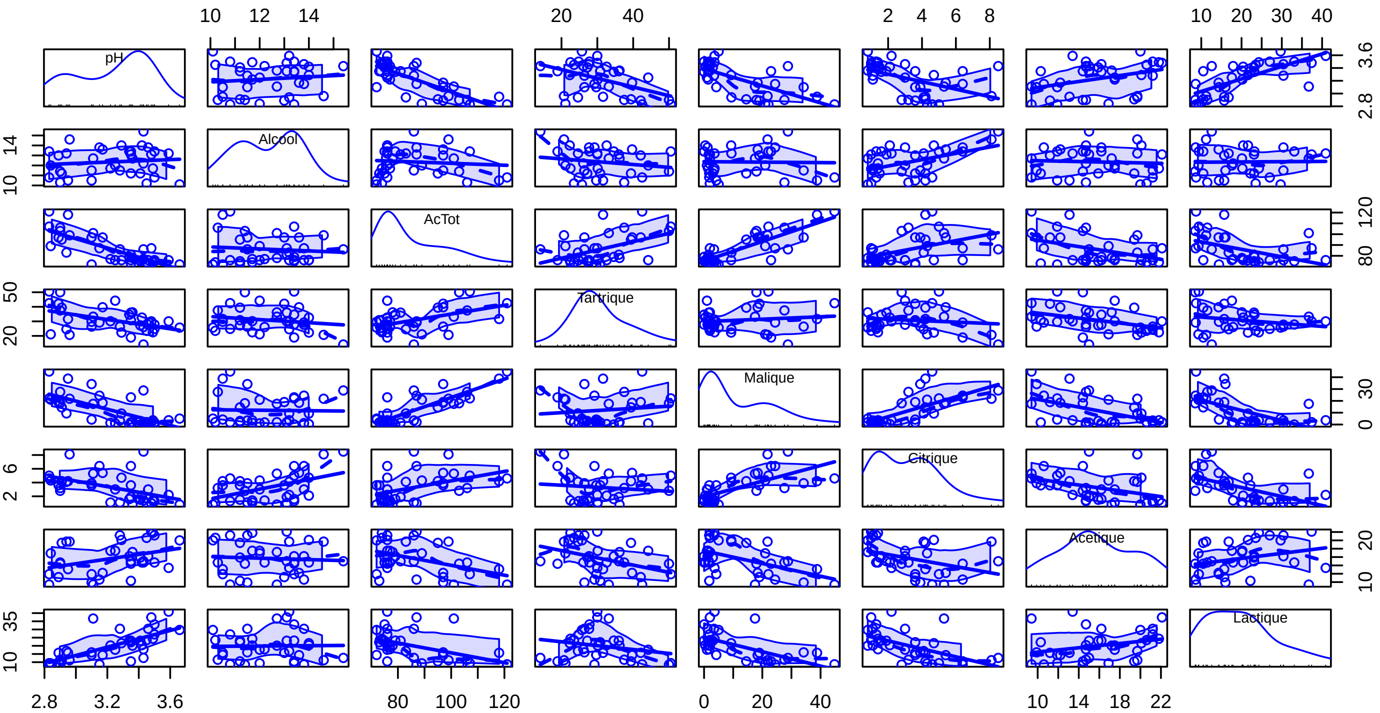
On considère la base de données `Cepage` composée de 36 observations et 10 variables. La variable que nous voulons expliquer est `Y=pH`, le pH du vin, à partir des autres variables qui sont:

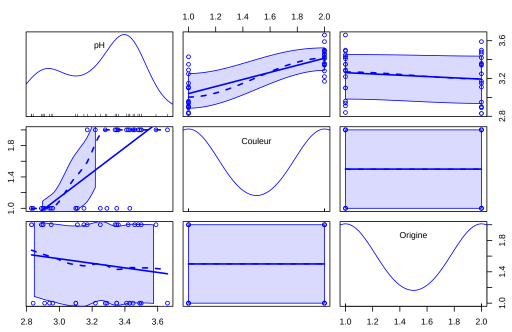
- `Origine`: facteur avec 2 modalités: Bordeaux et Bourgogne.
- `Couleur`: facteur avec 2 modalités: Blanc et Rouge.
- `Alcool`: Taux d'alcool dans le vin.
- `Malique`: Acide malique .
- `Tartrique`: Acide tartarique (reflête la dureté du vin, comme le tanin).
- `Citrique`: Acide citrique (reflète la fraicheur de vin).
- `Acetique`: Acide acétique.
- `Lactique`: Acide lactique.
- `AcTot`: Acidité totale.

1. On commence par analyser les différents liens entre les variables:

```
scatterplotMatrix(~pH  + Alcool + AcTot + Tartrique + Malique +
                     Citrique + Acetique + Lactique,data=Cepages)
table(Cepages$Origine,Cepages$Couleur)
scatterplotMatrix(~pH +Couleur+Origine,data=Cepages)
```

Voici les graphes et résultats numériques obtenus:





```
> table(Cepages$Origine,Cepages$Couleur)

            Blanc Rouge
  Bordeaux      9     9
  Bourgogne     9     9
```

Questions 1: Que peut-on déduire du premier graphe? Concernant le second graphe, couplé avec les données numériques, que dire des variables `Origine` *et* `Couleur` *quant à leur influence sur* `pH` **(1pt)**?

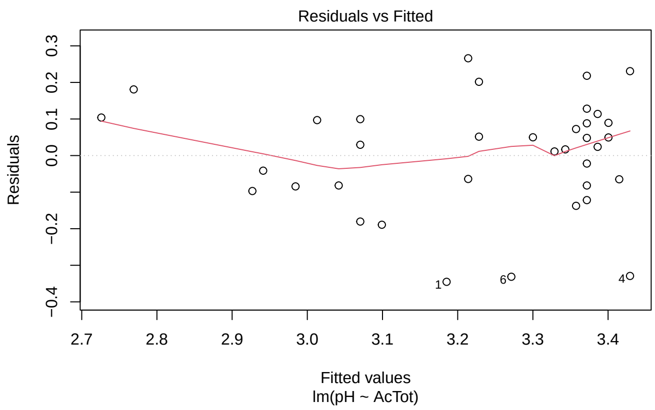
2. On tape ensuite les commandes:

```
Reg1=lm(pH~AcTot,data=Cepages)
summary(Reg1); plot(Reg1,1)
```

Voici les résultats numériques et la figure obtenue:

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.462394   0.169697  26.296  < 2e-16 ***
AcTot       -0.014350   0.001949  -7.363 1.56e-08 ***

Residual standard error: 0.155 on 34 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6146,Adjusted R-squared:  0.6032
F-statistic: 54.21 on 1 and 34 DF,  p-value: 1.558e-08
```



Questions 2: Que représentent formellement les valeurs `-0.014350`*,* `0.001949` *et* `54.21`*? Pourquoi a-t-on* `34 DF`*? Que conclure des résultats numériques et du graphe?* **(2pts)**

3. On a ensuite tapé les commandes:

```
Reg2=lm(pH~Origine*Couleur,data=Cepages); Anova(Reg2)
Reg21=lm(pH~Origine+Couleur,data=Cepages); Anova(Reg21)
Reg22=lm(pH~Couleur,data=Cepages); summary(Reg22)
```

Et à nouveau les résultats obtenus:

```
> Anova(Reg2)
                 Sum Sq Df F value    Pr(>F)
Origine         0.04202  1  1.6961    0.2021
Couleur         1.25814  1 50.7768 4.367e-08 ***
Origine:Couleur 0.02722  1  1.0988    0.3024

> Anova(Reg21)

           Sum Sq Df F value   Pr(>F)
Origine   0.04202  1   1.691   0.2025
Couleur   1.25814  1  50.625 3.78e-08 ***
```

```
> summary(Reg22)

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.04056    0.03753  81.010  < 2e-16 ***
CouleurRouge  0.37389    0.05308   7.044 3.93e-08 ***

Residual standard error: 0.1592 on 34 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5934,Adjusted R-squared:  0.5814
F-statistic: 49.62 on 1 and 34 DF,  p-value: 3.932e-08
```

Questions 3: Expliquez ce qui a été fait et ce que l'on peut en conclure. Avec le modèle `Reg22`*, quel serait la prédiction du pH pour un vin de Bourgogne blanc?* **(1.5pts)**

4. On poursuit avec les commandes:

```
reg3=lm(pH ~., data=Cepages)
RegBIC=stepAIC(reg3,k=log(36), direction="both")
summary(RegBIC)
plot(RegBIC,1); plot(RegBIC,3)
```

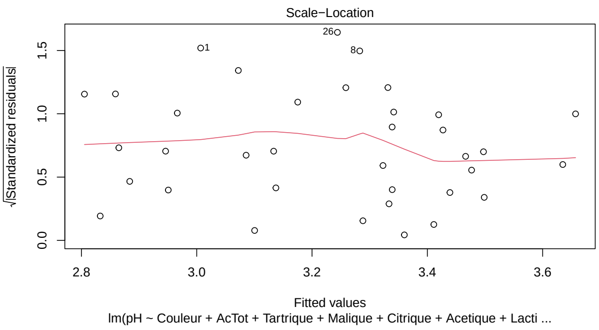
Et voici une partie des résultats numériques obtenus:

```
> Step:  AIC=-161.71
pH ~ Couleur + AcTot + Tartrique + Malique + Citrique + Acetique +
    Lactique

            Df Sum of Sq     RSS     AIC
<none>                   0.18182 -161.71
- Citrique   1  0.021727 0.20355 -161.23
+ Origine    1  0.011255 0.17057 -160.43
+ Alcool     1  0.002191 0.17963 -158.56
- Acetique   1  0.037701 0.21952 -158.51
- Tartrique  1  0.038239 0.22006 -158.42
- Malique    1  0.148865 0.33069 -143.76
- Lactique   1  0.215726 0.39755 -137.13
- Couleur    1  0.223141 0.40496 -136.46
- AcTot      1  0.281547 0.46337 -131.61

> Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.888267   0.190840  20.375  < 2e-16 ***
CouleurRouge  0.291017   0.049645   5.862 2.65e-06 ***
AcTot        -0.021580   0.003277  -6.585 3.85e-07 ***
Tartrique     0.008215   0.003385   2.427   0.0219 *
Malique       0.019899   0.004156   4.788 4.95e-05 ***
Citrique      0.021942   0.011995   1.829   0.0780 .
Acetique      0.013192   0.005475   2.410   0.0228 *
Lactique      0.014053   0.002438   5.764 3.46e-06 ***

Residual standard error: 0.08058 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9142,Adjusted R-squared:  0.8928
F-statistic: 42.64 on 7 and 28 DF,  p-value: 2.791e-13
```



Questions 4: Expliquez ce qui a été fait, ce que représente `-161.23` *et ce qu'on en déduit. Que peut-on conclure de tout ceci* **(1.5pts)**

5. On a enfin exécuté les commandes:

```
RegBIC2=lm(pH ~ Couleur+AcTot+Malique+Lactique,data=Cepages)
summary(RegBIC2)
anova(RegBIC2,RegBIC)
```

Avec pour résultats obtenus:

```
> Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   4.101534   0.155583  26.362  < 2e-16 ***
CouleurRouge  0.234663   0.046107   5.090 1.66e-05 ***
AcTot        -0.015853   0.002023  -7.835 7.66e-09 ***
Malique       0.012849   0.002692   4.772 4.12e-05 ***
Lactique      0.010982   0.002274   4.828 3.51e-05 ***

Residual standard error: 0.08656 on 31 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8904,Adjusted R-squared:  0.8763
F-statistic: 62.99 on 4 and 31 DF,  p-value: 1.925e-14

> anova(RegBIC2,RegBIC)
Analysis of Variance Table

Model 1: pH ~ Couleur + AcTot + Malique + Lactique
Model 2: pH ~ Couleur + AcTot + Tartrique + Malique + Citrique + Acetique + Lactique
  Res.Df     RSS Df Sum of Sq    F  Pr(>F)
1     31 0.23228
2     28 0.18182  3  0.050456 2.59 0.07268 .
```

Questions 5: Expliquez ce qui a été fait et ce que l'on peut en conclure **(1pt)**