

Première Année Master M.A.E.F. 2024 – 2025

Econométrie II

Contrôle continu n°2, avril 2025

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice théorique (Sur 20 points)

On considère p suites de réels observés $(X_i^{(j)})_{i \in \mathbf{N}}$, et pour $n \geq p+1$, on définit la matrice $Z = (Z_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p+1}$ telle que $Z_{i1} = 1$ et $Z_{ij} = X_i^{(j-1)}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p+1$, et on note $[Z] = \{Z\beta, \beta \in \mathbf{R}^{p+1}\}$. Avec $Y = {}^t(Y_1, \dots, Y_n)$, on suppose qu'il existe un vecteur réel inconnu $\theta = (\theta_j)_{0 \leq j \leq p} \in \mathbf{R}^{p+1}$ tel que

$$Y = Z\theta + \varepsilon$$

où $\varepsilon = {}^t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, la suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite non observée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) centrées de variance $0 < \sigma_\varepsilon^2 < \infty$. On suppose que Y est aussi observé.

- On note $\|U\|^2 = \langle U, U \rangle$ où $\langle U, V \rangle = {}^tUV$ pour $U, V \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $\hat{Y} = {}^t(\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n) = \operatorname{argmin}_{U \in [Z]} \|Y - U\|$ s'écrit $\hat{Y} = MY$ avec M une matrice que l'on précisera en distinguant suivant le rang de Z (**2pts**).
- Uniquement dans cette question, on suppose que les suites $(X_i^{(j)})_{i \in \mathbf{N}}$ sont des suites de v.a.i.i.d., de lois absolument continues telles que $\mathbb{E}[X_0^{(j)}] = m_j$ et $\operatorname{var}(X_0^{(j)}) = \sigma_j^2$ avec $0 < \sigma_j^2 < \infty$ pour $1 \leq j \leq p$, les suites $(X_i^{(j)})_{i \in \mathbf{N}}$ étant aussi indépendantes les unes les autres. On note $\bar{X}_i^{(j)} = X_i^{(j)} - m_j$ et $\bar{Z}$ la matrice constituée de la même manière que Z mais avec les $\bar{X}_i^{(j)}$ qui remplacent les $X_i^{(j)}$. Démontrer que Z et $\bar{Z}$ sont presque sûrement de rang $p+1$ (**1.5pts**). Démontrer que $\hat{Y} = \bar{Z}({}^t\bar{Z}\bar{Z})^{-1}{}^t\bar{Z}Y$ presque sûrement (**1.5pts**). Démontrer que $\frac{1}{n}{}^t\bar{Z}\bar{Z}$ converge presque sûrement quand $n \rightarrow \infty$ vers une matrice (dépendant des σ_j^2) que l'on précisera (**1pt**).
- On supposera désormais que Z est une matrice de nombres réels et que $\frac{1}{n}{}^tZZ = D$ avec $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq p+1}$ une matrice diagonale définie positive. Préciser d_{11} (**0.5pts**). On note $X^{(j)} = (X_i^{(j)})_{1 \leq i \leq n}$. Déterminer $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(j)}$ et $\langle X^{(j)}, X^{(j')} \rangle$ pour $j, j' \in \{1, \dots, p\}$ (**1pt**). Montrer que $\hat{\theta}_j = \frac{1}{n d_{j+1, j+1}} \langle X^{(j)}, Y \rangle$ pour $j \in \{1, \dots, p\}$ (**1pt**) et montrer que $\hat{\theta}_j$ converge en probabilité vers θ_j pour $j \in \{0, \dots, p\}$ (**1pt**).
- Rappeler le comportement de $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p-1} \|Y - \hat{Y}\|^2$ quand $n \rightarrow \infty$ sous les hypothèses précédentes (**0.5pts**).
- On veut tester $H_0 : \theta_j = 0$ contre $H_1 : \theta_j \neq 0$, où j est fixé dans $\{1, \dots, p\}$. Montrer que le test de Student s'écrit $\hat{T}_j = \frac{\langle X^{(j)}, Y \rangle}{\hat{\sigma} \sqrt{\langle X^{(j)}, X^{(j)} \rangle}}$ (**1pt**).
- On suppose que $\theta_p \neq 0$ et que l'on a oublié prendre en compte $X^{(p)}$ dans l'analyse. On effectue donc une régression linéaire en utilisant Z' , matrice extraite de Z en supprimant sa colonne $p+1$. On note alors $\hat{\theta}' = (\hat{\theta}'_j)_{0 \leq j \leq p-1}$ l'estimateur par moindres carrés de $(\theta_j)_{0 \leq j \leq p-1}$ et $\hat{Y}'$ les valeurs prédites par cette nouvelle régression.
 - Montrer que $\hat{Y}' = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) \mathbb{I}_n + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\langle X^{(j)}, Y \rangle}{n d_{j+1, j+1}} X^{(j)}$ avec $\mathbb{I}_n = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ (**1pt**).
 - En déduire que $\|Y - \hat{Y}'\|^2 = \|\theta_p X^{(p)} + U'\|^2$ avec $U' = (I_n - Z'({}^tZ'Z')^{-1}{}^tZ')\varepsilon$ (**2pts**).
 - Montrer que $\frac{1}{n^2} \operatorname{var}({}^tX^{(p)}U') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (**1.5pts**). En déduire que $\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}'\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \theta_p^2 d_{p+1, p+1} + \sigma_\varepsilon^2$ (**2.5pts**).
 - Si on note respectivement $\widehat{BIC}$ et $\widehat{BIC}'$ les critères BIC avec, respectivement, les variables $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ et $X^{(1)}, \dots, X^{(p-1)}$, que peut-on dire de $\mathbb{P}(\widehat{BIC}' < \widehat{BIC})$ (**1.5pts**)? Qu'en déduire plus généralement (**0.5pts**)?

Proof. 1. On a $M = P_{[Z]}$. Si le rang de Z est $p+1$, alors $M = Z({}^tZZ)^{-1}{}^tZ$. Si le rang de Z est $1 \leq k \leq p$, on note $\tilde{Z}$ une matrice extraite contenant k colonnes et de rang k . Alors $M = \tilde{Z}({}^t\tilde{Z}\tilde{Z})^{-1}{}^t\tilde{Z}$.

2. Considérons $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbf{R}^{p+1}$. Les vecteurs aléatoires $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ sont indépendants et absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. Donc $a_0 \mathbf{I} + a_1 X^{(1)} + \dots + a_p X^{(p)}$ est un vecteur aléatoire absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ sauf si $a_i = 0$ pour $i = 0, \dots, p$: donc $\mathbb{P}(a_0 \mathbf{I} + a_1 X^{(1)} + \dots + a_p X^{(p)} = 0) = 0$ sauf si $a_i = 0$ pour $i = 0, \dots, p$. Donc les colonnes de Z sont presque sûrement linéairement indépendantes, donc Z presque sûrement de rang $p+1$.

Comme les $\bar{X}^{(j)}$ sont des $X^{(j)}$ auquel on a retiré $\mathbf{I}$ (première colonne de Z), donc $[\bar{Z}] = [Z]$. Ainsi $P_{[Z]} = P_{[\bar{Z}]}$ d'où le résultat.

$$\text{On a } \frac{1}{n} {}^t \bar{Z} \bar{Z} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(1)} & \dots & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(p)} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(1)} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i^{(1)})^2 & \dots & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(1)} \bar{X}_i^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(p)} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(2)} \bar{X}_i^{(p)} & \dots & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i^{(p)})^2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que les v.a. sont i.i.d., par la LGN, on a $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(j)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[\bar{X}_1^{(j)}] = 0$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i^{(j)})^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[(\bar{X}_1^{(j)})^2] = \sigma_j^2$

$$\text{et } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^{(j)} \bar{X}_i^{(j')} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[\bar{X}_1^{(j)} \bar{X}_1^{(j')}] = \text{cov}(X_1^{(j)}, X_1^{(j')}) = 0. \text{ Donc } \frac{1}{n} {}^t \bar{Z} \bar{Z} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

3. On a $d_{11} = 1$.

Il est clair que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(j)} = 0$ et $\langle X^{(j)}, X^{(j')} \rangle = n d_{j+1, j+1}$ si $j' = j$ et $\langle X^{(j)}, X^{(j')} \rangle = 0$ si $j \neq j'$ pour $j, j' \in \{1, \dots, p\}$.

$$\text{On a } \hat{\theta} = \frac{1}{n} D^{-1} {}^t Z Y = \frac{1}{n} D^{-1} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{I}, Y \rangle \\ \langle X^{(1)}, Y \rangle \\ \vdots \\ \langle X^{(p)}, Y \rangle \end{pmatrix}, \text{ d'où le résultat demandé.}$$

Il est clair que $({}^t Z Z)^{-1} = \frac{1}{n} D^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$: condition connue pour avoir $\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \theta$.

4. Sous les hypothèses, on a $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \sigma_\varepsilon^2$.

5. La statistique de Student dans ce cas est: $\hat{T} = \frac{\hat{\theta}_j}{\hat{\sigma} \sqrt{{}^t C_j ({}^t Z Z)^{-1} C_j}}$ où $C_j = {}^t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, d'où le résultat.

6. En oubliant $X^{(p)}$, on a

(a) Il suffit d'écrire $\hat{Y}' = Z' ({}^t Z' Z')^{-1} {}^t Z' Y$ et $({}^t Z' Z')^{-1} = \frac{1}{n} (D_{ij})_{0 \leq i, j \leq p-1}^{-1}$.

(b) On montre que $Z' ({}^t Z' Z')^{-1} {}^t Z' (Z \theta) = \theta_0 \mathbf{I}_n + \sum_{j=1}^{p-1} \theta_j X^{(j)}$ car $Z' X^{(j)} = 0$. Donc $\hat{Y}' = \theta_0 \mathbf{I}_n + \sum_{j=1}^{p-1} \theta_j X^{(j)} + Z' ({}^t Z' Z')^{-1} {}^t Z' \varepsilon$. Comme $Y = \theta_0 \mathbf{I}_n + \sum_{j=1}^p \theta_j X^{(j)} + \varepsilon$, on en déduit $Y - \hat{Y}'$.

(c) On a $\text{var}({}^t X^{(p)} U') = {}^t X^{(p)} \text{cov}(U') X^{(p)} = \sigma_\varepsilon^2 \|P_{[Z']^\perp} X^{(p)}\|^2 \leq \sigma_\varepsilon^2 \|X^{(p)}\|^2 = \sigma_\varepsilon^2 n d_{p+1, p+1}$, d'où le résultat.

On a $\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}'\|^2 = \frac{\theta_p^2}{n} \|X^{(p)}\|^2 + \frac{1}{n} \|U'\|^2 + \frac{2\theta_p}{n} {}^t X^{(p)} U'$. Il est clair que $\frac{\theta_p^2}{n} \|X^{(p)}\|^2 = \theta_p^2 d_{p+1, p+1}$, que $\frac{1}{n} \|U'\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \sigma_\varepsilon^2$ (convergence de l'estimateur de la variance) et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev,

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{2\theta_p}{n} {}^t X^{(p)} U'\right| \geq \varepsilon\right) \leq 4\theta_p^2 \frac{\text{var}({}^t X^{(p)} U')}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \implies \frac{2\theta_p}{n} {}^t X^{(p)} U' \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0.$$

D'où le résultat d'après le Lemme de Slutsky.

- (d) $\mathbb{P}(\widehat{BIC}' < \widehat{BIC}) = \mathbb{P}\left(n \log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}'\|^2\right) - n \log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}\|^2\right) < \log(n)\right) = \mathbb{P}\left(\log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}'\|^2\right) - \log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}\|^2\right) < \frac{\log(n)}{n}\right).$

D'après les questions précédentes $\log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}'\|^2\right) - \log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}\|^2\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \log\left(1 + \frac{\theta_p^2 d_{p+1, p+1}}{\sigma_\varepsilon^2}\right) > 0$. Donc pour n

suffisamment grand et tel que $\log(n)/n \leq \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_p^2 d_{p+1, p+1}}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$, alors $\mathbb{P}\left(\log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}'\|^2\right) - \log\left(\frac{1}{n} \|Y - \hat{Y}\|^2\right) < \frac{\log(n)}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On en déduit que le critère BIC ne choisit pas asymptotiquement un faux modèle.

□

Exercice de TP utilisant le logiciel R (Sur 6 points)

On considère la base de données **Price** des prix (absolus et relatifs) dans de nombreuses villes du monde. Plus précisément, les variables considérées pour chaque ville sont:

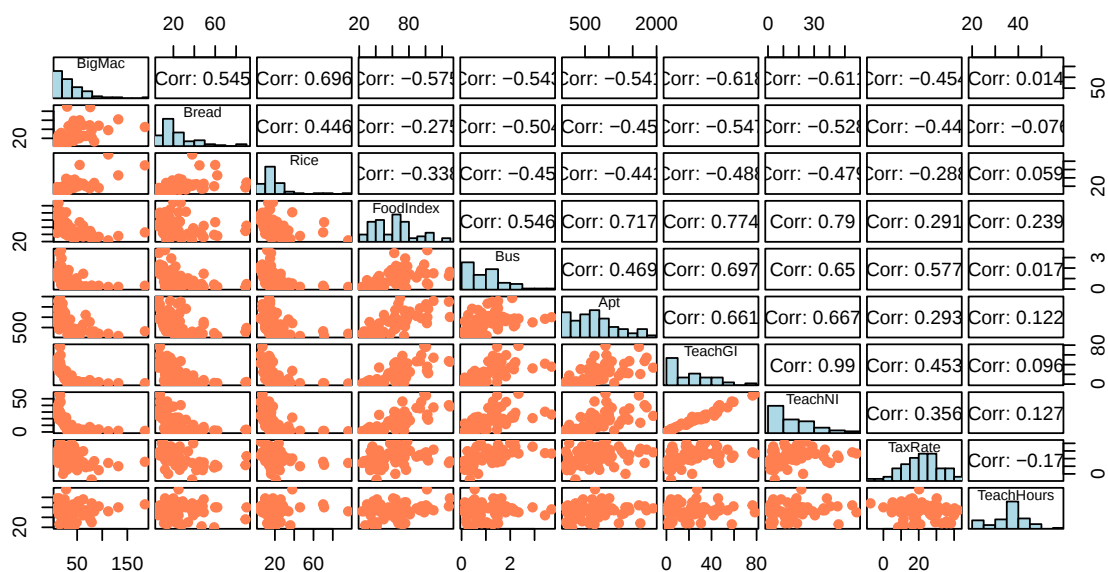
- **BigMac**: Minutes de travail pour acheter un Big Mac;
- **Bread**: Minutes de travail pour acheter 1 kg de pain;
- **Rice**: Minutes de travail pour acheter 1 kg de riz;
- **FoodIndex**: Indice des prix des denrées alimentaires (Zurich=100);
- **Bus**: Coût en dollars US pour un aller simple de 10 km en autobus;
- **Apt**: Loyer normal (en dollars US) d'un appartement de 3 pièces;
- **TeachGI**: Revenu brut d'un enseignant du primaire, en milliers de dollars US;
- **TeachNI**: Revenu net de l'enseignant du primaire, en milliers de dollars US;
- **TaxRate**: Taux d'imposition payé par un enseignant du primaire;
- **TeachHours**: Heures de travail hebdomadaires d'un enseignant du primaire.

On essaie de modéliser au mieux **FoodIndex** en fonction des autres variables.

1. Un premier regard est porté sur la base de données **Price**:

```
head(Price); str(Price); dim(Price)
pairs(Price)
```

Voici le graphe et les résultats numériques obtenus:



```
> head(Price)
      BigMac Bread Rice FoodIndex  Bus Apt TeachGI TeachNI TaxRate TeachHours
Amsterdam    16     9   9      65.9 2.00 890   34.3    20.5 40.2332         39
Athens        21    12  19      63.5 0.61 620   19.5    15.9 18.4615         29
Auckland      19    19   9      55.4 1.57 780   22.0    16.1 26.8182         40
Bangkok       50    42  25      46.4 0.47 120    4.2     4.0  4.7619         35
```

```
> str(Price)
'data.frame': 69 obs. of 10 variables:
 $ BigMac : int 16 21 19 50 22 15 16 93 54 18 ...
 $ Bread : int 9 12 19 42 19 7 10 48 20 11 ...
 $ Rice : int 9 19 9 25 10 7 16 16 28 12 ...
 $ FoodIndex : num 65.9 63.5 55.4 46.4 62.9 98.4 64.4 33.3 36.9 74.7 ...
 $ Bus : num 2 0.61 1.57 0.47 0.91 2.34 2.21 0.32 0.36 1.5 ...
 $ Apt : int 890 620 780 120 590 930 630 200 350 590 ...
```

```

$ TeachGI : num 34.3 19.5 22 4.2 25.5 78.5 45 4.1 4.1 30.6 ...
$ TeachNI : num 20.5 15.9 16.1 4 20.1 57.6 28.9 3.9 3.3 18.9 ...
$ TaxRate : num 40.23 18.46 26.82 4.76 21.18 ...
$ TeachHours: int 39 29 40 35 39 35 36 41 40 24 ...

> dim(Price)
[1] 69 10

```

Questions 1: Que peut-on déduire du graphe (0.5pts)?

2. On tape ensuite les commandes:

```

regBM=lm(FoodIndex~BigMac,data=Price)
summary(regBM)
par(mfrow=c(2,2)); plot(regBM)

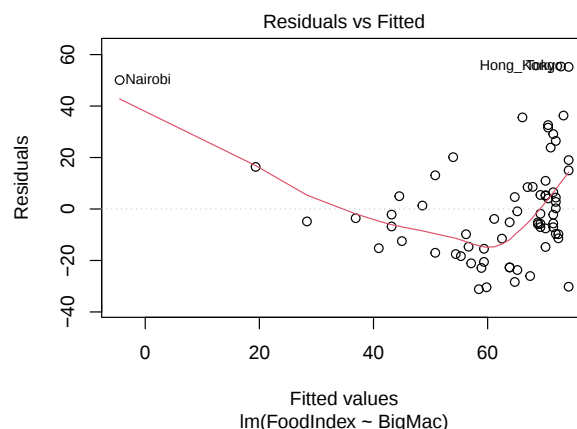
```

Voici les résultats numériques et la figure obtenue:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	78.68879	3.80273	20.693	< 2e-16 ***
BigMac	-0.44958	0.07824	-5.746	2.44e-07 ***

Residual standard error: 20.27 on 67 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3301, Adjusted R-squared: 0.3201
F-statistic: 33.02 on 1 and 67 DF, p-value: 2.435e-07



Questions 2: Comment a-t-on obtenu explicitement la valeur -5.746? Pourquoi a-t-on 67 DF? Que conclure? (1pt)

3. On a ensuite tapé les commandes:

```

reg=lm(FoodIndex ~.,data=Price)
summary(reg); plot(reg)

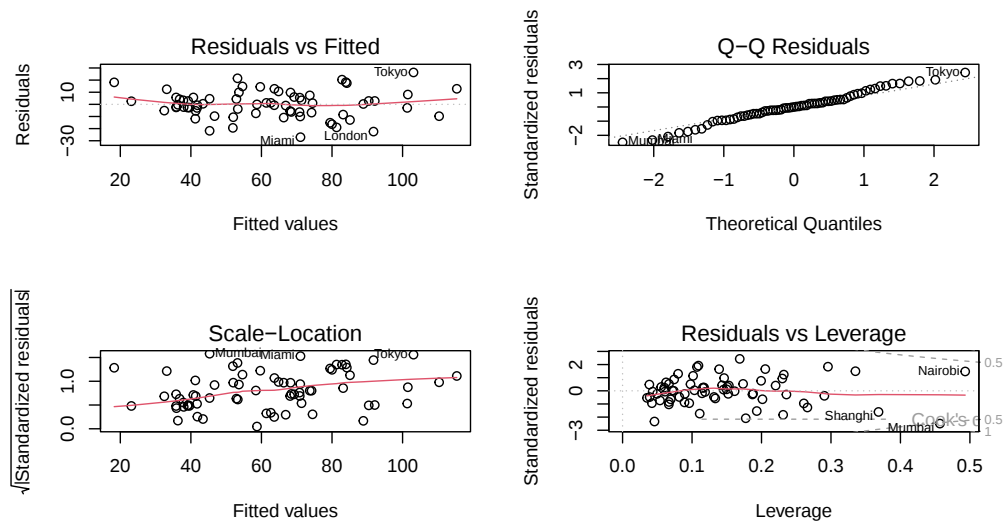
```

Et à nouveau les résultats obtenus:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-1.09968	11.19872	-0.098	0.9221
BigMac	-0.20569	0.07798	-2.638	0.0107 *
Bread	0.44383	0.10564	4.201	9.11e-05 ***
Rice	0.26881	0.13597	1.977	0.0527 .
Bus	3.59014	2.83317	1.267	0.2101
Apt	0.01825	0.00434	4.204	9.02e-05 ***
TeachGI	-0.97768	0.86750	-1.127	0.2643
TeachNI	2.22275	1.13819	1.953	0.0556 .
TaxRate	0.26530	0.25724	1.031	0.3066
TeachHours	0.48015	0.20478	2.345	0.0224 *

Residual standard error: 11.86 on 59 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.7981, Adjusted R-squared: 0.7673
 F-statistic: 25.91 on 9 and 59 DF, p-value: < 2.2e-16



Questions 3: Expliquez ce qui a été fait et ce que l'on peut en conclure (1pt)

4. On poursuit avec les commandes:

```
library(MASS)
BX=boxcox(FoodIndex~.,plotit = TRUE,lambda = seq(-5,5,0.01),data=Price)
ind=which(BX$y==max(BX$y)); lambda=BX$x[ind]; lambda
regBC=lm(I(FoodIndex^0.5)~.,data=Price); summary(regBC)
1-sum((FoodIndex-regBC$fit^2)^2)/sum((FoodIndex-mean(FoodIndex))^2)
```

Et à nouveau les résultats obtenus:

```
> lambda
[1] 0.37
```

```
> summary(regBC)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	3.8724016	0.6943306	5.577	6.43e-07 ***
BigMac	-0.0141949	0.0048351	-2.936	0.00474 **
Bread	0.0291718	0.0065501	4.454	3.82e-05 ***
Rice	0.0146537	0.0084305	1.738	0.08740 .
Bus	0.2692093	0.1756594	1.533	0.13073
Apt	0.0011580	0.0002691	4.304	6.42e-05 ***
TeachGI	-0.0458402	0.0537860	-0.852	0.39751
TeachNI	0.1143680	0.0705689	1.621	0.11042
TaxRate	0.0161516	0.0159490	1.013	0.31534
TeachHours	0.0294259	0.0126966	2.318	0.02396 *

Residual standard error: 0.7354 on 59 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.8025, Adjusted R-squared: 0.7724
 F-statistic: 26.64 on 9 and 59 DF, p-value: < 2.2e-16

```
[1] 0.8058518
```

Questions 4: Expliquez ce qui a été fait, ce que représente 0.37, comment on calcule 0.8058518, et ce que l'on peut conclure de tout ceci (1.5pts)

5. On a ensuite tapé les commandes:

```
Reg=stepAIC(regBC,k=log(60), trace=FALSE)
summary(Reg); par(mfrow=c(2,2)); plot(Reg)
```

Avec pour résultats obtenus:

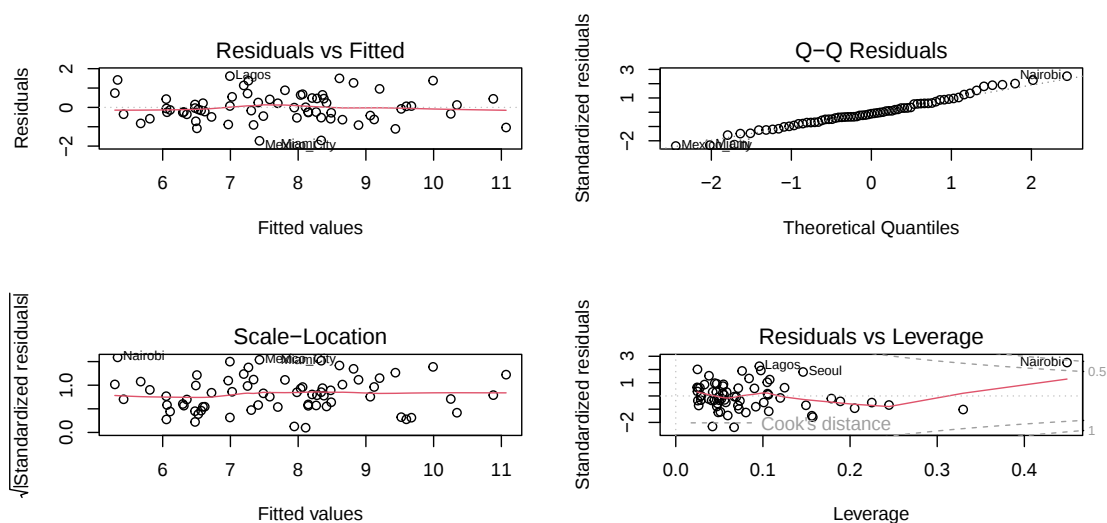
Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	4.6712231	0.5402114	8.647	2.65e-12 ***
BigMac	-0.0122607	0.0040152	-3.054	0.003311 **
Bread	0.0271351	0.0064574	4.202	8.49e-05 ***
Apt	0.0011364	0.0002756	4.123	0.000111 ***
TeachNI	0.0608001	0.0098193	6.192	4.99e-08 ***
TeachHours	0.0290592	0.0126035	2.306	0.024434 *

Residual standard error: 0.7563 on 63 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.7769, Adjusted R-squared: 0.7592

F-statistic: 43.88 on 5 and 63 DF, p-value: < 2.2e-16



Questions 5: Expliquez pourquoi est écrit 5 and 63 DF. Expliquez ce qui a été fait et ce que l'on peut en conclure (1pt)

6. On termine avec les commandes:

```
Price2=Price[-46,]
RegBC2=lm(I(FoodIndex^0.5) ~.,data=Price2)
Reg2=stepAIC(RegBC2,k=log(59))
summary(Reg2); plot(Reg2)
```

Avec pour résultats obtenus:

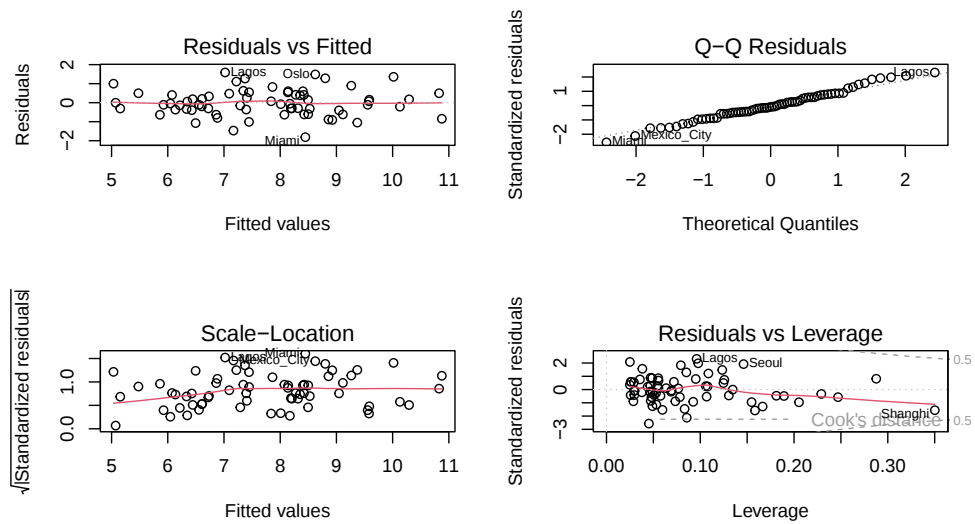
Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	5.0933991	0.5403822	9.426	1.39e-13 ***
BigMac	-0.0208690	0.0050328	-4.147	0.000104 ***
Bread	0.0296561	0.0062441	4.749	1.25e-05 ***
Apt	0.0010405	0.0002659	3.913	0.000229 ***
TeachNI	0.0556508	0.0095837	5.807	2.36e-07 ***
TeachHours	0.0276745	0.0120556	2.296	0.025095 *

Residual standard error: 0.7228 on 62 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.7983, Adjusted R-squared: 0.7821

F-statistic: 49.08 on 5 and 62 DF, p-value: < 2.2e-16



Questions 6: Expliquez ce qui a été fait et ce que l'on peut en conclure (1pt)