Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. $2025-2026$

Econométrie II

Contrôle continu n°1, mars 2026

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

On suppose que l'on a observé $Y_1,\dots,Y_n$ que l'on explique par deux groupes de variables exogènes:

- $(X_i^{(j)})_{1\le i\le n}$ pour $1\le j\le j_1$ et on définira la matrice $X_1=(X_i^{(j)})_{1\le i\le n,\,1\le j\le j_1}$;
- $(X_i^{(j)})_{1\le i\le n}$ pour $j_1+1\le j\le j_1+j_2$ et on définira la matrice $X_2=(X_i^{(j)})_{1\le i\le n,\,j_1+1\le j\le j_1+j_2}$;

avec $j_1,j_2\in\mathbf{N}^*$ tels que $j_1+j_2\le n$ et les $X_i^{(j)}$ étant des réels observés. Soit $X=(X_i^{(j)})_{1\le i\le n,\,1\le j\le j_1+j_2}$, on supposera que le rang de X est j_1+j_2. On définit $[X]=\{X\,\beta,\ \beta\in\mathbf{R}^{j_1+j_2}\}$ et de la même manière $[X_1]$ et $[X_2]$. On suppose que:

$$Y=X_1\,\theta^{(1)}+X_2\,\theta^{(2)}+\varepsilon,$$

où ε est un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance $\sigma_\varepsilon^2\,I_n$, I_n étant la matrice identité de taille n, $Y={}^t(Y_1,\dots,Y_n)$ et $\theta^{(1)}={}^t(\theta_1^{(1)},\dots,\theta_{j_1}^{(1)})$, $\theta^{(2)}={}^t(\theta_1^{(2)},\dots,\theta_{j_2}^{(2)})$.

1. Montrer que l'on peut écrire que $Y=X\,\theta+\varepsilon$. En déduire, en fonction de X et de Y, l'estimateur par moindres carrés $\widehat\theta$ de θ, puis les expressions des estimateurs $\widehat\theta^{(1)}$ et $\widehat\theta^{(2)}$ de $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$ dont on précisera les lois de probabilités.

2. Démontrer que le rang de X_1 est j_1. On note $P_{[X_1]}$ la matrice de projection orthogonale sur $[X_1]$ dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que si $U_2=(I_n-P_{[X_1]})\,Y$ alors $U_2=X_2'\,\theta^{(2)}+\varepsilon^{(2)}$ où l'on précisera X_2' et la loi de $\varepsilon^{(2)}$.

3. Montrer que si $Z_2\in\mathbf{R}^{j_2}$ est tel que $X_2'\,Z_2=0$ alors il existe $Z_1\in\mathbf{R}^{j_1}$ tel que $X_2\,Z_2=X_1\,Z_1$. En déduire que le rang de X_2' est j_2. En déduire qu'un autre estimateur de $\theta^{(2)}$ est $\widetilde\theta^{(2)}$ tel que:
$$\widetilde\theta^{(2)}=\big({}^tX_2'\,X_2'\big)^{-1}\,{}^tX_2'\,U_2.$$

4. Démontrer que $\widetilde\theta^{(2)}$ est non biaisé et déterminer sa loi en fonction de σ_ε^2, $\theta^{(2)}$, $P_{[X_1]}$ et X_2.

5. On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $[X_1]$ et $[X_2]$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux. Montrer que $\widehat\theta^{(2)}=\widetilde\theta^{(2)}$.

6. On ne suppose donc plus désormais que $[X_1]$ et $[X_2]$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux. Montrer que ${}^tX\,X\,\widehat\theta={}^tX\,Y$ et en déduire que $\widehat\theta^{(1)}$ et $\widehat\theta^{(2)}$ vérifient
$$\begin{cases}{}^tX_1\,X_1\,\widehat\theta^{(1)}+{}^tX_1\,X_2\,\widehat\theta^{(2)}={}^tX_1\,Y\\ {}^tX_2\,X_1\,\widehat\theta^{(1)}+{}^tX_2\,X_2\,\widehat\theta^{(2)}={}^tX_2\,Y\end{cases}.$$
En déduire que $\widetilde\theta^{(2)}=\widehat\theta^{(2)}$.

7. On considère les résidus $\widehat\varepsilon^{(2)}=Y-X_2\,\widehat\theta^{(2)}$. Montrer que $\widehat\theta^{(1)}=\big({}^tX_1\,X_1\big)^{-1}\,{}^tX_1\,\widehat\varepsilon^{(2)}$.

8. Soit $\widetilde\sigma^2=\dfrac{1}{n-j_1-j_2}\,\big\|Y-X_1\,\widetilde\theta^{(1)}-X_2\,\widetilde\theta^{(2)}\big\|^2$. Déterminer la loi de $\widetilde\sigma^2$.

9. On s'intéresse au problème de test: $H_0:\ \theta^{(2)}=0$ contre $H_1:\ \theta^{(2)}\neq 0$. En utilisant $\widetilde\theta^{(2)}$ et $\widetilde\sigma^2$, proposer une statistique de test pour ce problème de test et donner sa loi sous H_0.