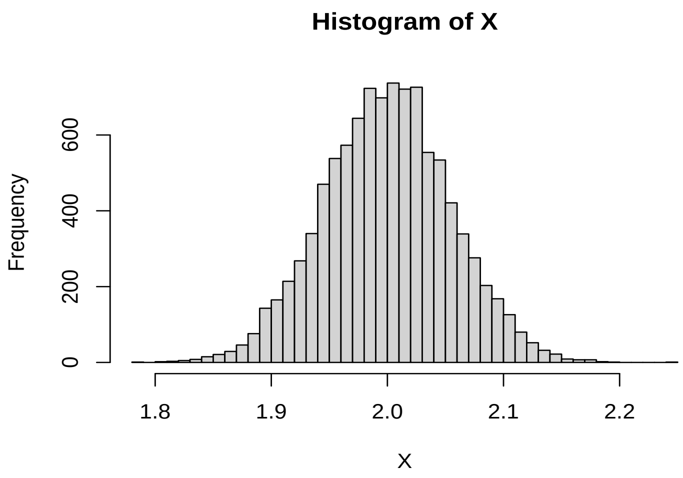
Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE

Cours de Statistique 2

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)



U.F.R. 27 et SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisciplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Plan du cours

Introduction

1. Variables aléatoires et espérance
2. Vecteurs aléatoires et indépendance
3. Vecteurs gaussiens
4. Convergence et théorèmes limite
5. Estimation paramétrique
6. Tests paramétriques et non paramétriques

References

[1] Barbe et Ledoux, *Probabilités*, Belin.

[2] Dacunha-Castelle et Duflo, *Probabilités et Statistiques (I)*, Masson

[3] Dauxois, J. et Hassenforder, C. (2004). Toutes les probabilités et Statistiques. Cours et Exercices corrigés. Ellipses.

[4] Garet, O. et Kuntzmann, A., *De l'intégration aux probabilités*, Ellipses.

[5] Leboeuf, C., Guegand, J., Roque, J.L. et Landry, P. Cours de Probabilités et de statistiques, Ellipses

[6] Leboeuf, C.,Guegand, J.,Roque, J.L. et Landry, P. Exercices corrigés de probabilités, Ellipses

[7] Ross, S.M (2007). Initiation aux probabilités, Enseignement des Mathématiques. Presses polytechniques et universitaires romandes.

[8] Saporta, G. Probabilités, analyse des données et statistique (2nd édition), éditions Technip.

Introduction

Il demeure des choses inconnues à partir des connaissances antérieures en probabilités :

- Qu'est-ce qu'un événement et l'ensemble de tous les événements ?
- Que se passe-t-il pour des probabilités d'événements moins classiques (par exemple l'ensemble des décimaux) ?
- Comment traiter une variable aléatoire qui est continue et discrète à la fois (par exemple le nombre de minutes passées devant la TV) ?

Rappels: Mesures

Tribus

Notation.

- Ω est un ensemble (fini ou infini).
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles (parties) de Ω.

Rappel. Soit E un ensemble. E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Par exemple, un ensemble fini, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. En revanche, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition. Soit une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω (donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). On dit que $\mathcal{F}$ est une algèbre si:

- $\Omega \subset \mathcal{F}$;
- lorsque $A \in \mathcal{F}$ alors $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque $(A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{F}^n$ alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$.

Définition. Soit une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω (donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω si :

- $\Omega \subset \mathcal{F}$;
- lorsque $A \in \mathcal{F}$ alors $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$;
- pour $I \subset \mathbb{N}$, lorsque $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}^I$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Exemple.

- Cas du Pile ou Face.
- Cas où Ω est infini : $\Omega = \mathbb{N}$ par exemple.

Propriété. *Avec les notations précédentes :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. *si A et B sont dans la tribu $\mathcal{A}$, alors $A \cap B$ est dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus sur Ω, alors $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est une tribu sur Ω . Plus généralement, pour $I \subset \mathbb{N}$, si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ ensemble de tribus sur Ω, alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur Ω;*

4. *si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus sur Ω, alors $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ n'est pas forcément une tribu sur Ω.*

Définition. Si $\mathcal{E}$ est une famille de parties de Ω (donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$), alors on appelle tribu engendrée par $\mathcal{E}$, notée $\sigma(\mathcal{E})$, la tribu engendrée par l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{E}$ (on peut faire la même chose avec des algèbres).

Remarque.

La tribu engendrée est la "plus petite" tribu (au sens de l'inclusion) contenant la famille $\mathcal{E}$.

Rappel.

- Un ensemble ouvert U dans un espace métrique X est telle que pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.
- On dit qu'un ensemble dans un espace métrique X est fermé si son complémentaire dans X est ouvert.

Définition. Soit Ω un espace métrique. On appelle tribu borélienne sur Ω, notée, $\mathcal{B}(\Omega)$, la tribu engendrée par les ouverts de Ω. Un ensemble de $\mathcal{B}(\Omega)$ est appelé borélien.

Exemple.

- Boréliens sur $\mathbb{R}$, sur $]0, 1[$.
- Boréliens sur $\mathbb{R}^2$.

Espace mesurable

Définition. Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. On dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Corollaire. *Quand on s'intéressera aux probabilités, on dira que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.*

Propriété. *Si $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_i$ sont n espaces mesurables, alors un ensemble élémentaire de $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ est une réunion finie d'ensembles $A_1 \times \cdots \times A_n$ où chaque $A_i \in \mathcal{A}_i$. L'ensemble des ensembles élémentaires est une algèbre et on note $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ (on dit $\mathcal{A}_1$ tensoriel $\mathcal{A}_2$ ... tensoriel $\mathcal{A}_n$) la tribu sur Ω engendrée par ces ensembles élémentaires.*

Exemple.

Pavés de $\mathbb{R}^d$.

Définition. On appelle espace mesurable produit des $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_i$ l'espace mesurable $\left(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right)$.

Exemple.

Pile / Face 2 fois.

Définitions et Propriétés d'une mesure

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. L'application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ est une mesure si :

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Pour tout $I \subset \mathbb{N}$ et pour $(A_i)_{i \in I}$ famille disjointe de $\mathcal{A}$ (telle que $A_i \cup A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), alors $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$ (propriété dite de σ-additivité).

Définition. Avec les notations précédentes :

- Si $\mu(\Omega) < +\infty$, on dit que μ est finie.
- Si $\mu(\Omega) < M$ avec $M < +\infty$, on dit que μ est bornée.
- Si $\mu(\Omega) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité.

Exemple.

Cas de $\Omega = \mathbb{R}$, de $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{R}^2$.

Définition. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable (resp. probabilisable) alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (resp. probabilisé quand μ est une probabilité).

Remarque.

Sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on peut définir une infinité de mesures.

Propriété. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, une famille de $\mathcal{A}$.*

1. *Si $A_1 \subset A_2$, alors $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.*
2. *Si $\mu(A_1) < +\infty$ et $\mu(A_2) < +\infty$, alors $\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.*
3. *Pour tout $I \subset \mathbb{N}$, on a $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.*
4. *Si $A_i \subset A_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (suite croissante en sens de l'inclusion), alors $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante convergente telle que*
   $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \to +\infty} \mu(A_i)$ *(même si cette limite est $+\infty$).*
5. *Si $A_{i+1} \subset A_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (suite décroissante en sens de l'inclusion) et $\mu(A_0) < +\infty$, alors $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante convergente telle que $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \to +\infty} \mu(A_i)$.*

Exemple.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On définit $\nu(A) = \mu(A \cap B)$ où $B \in \mathcal{A}$. ν mesure ?
2. Si μ_1 et μ_2 mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mu_1 + \mu_2$ et $\alpha\mu$ sont-elles des mesures ?

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de $\mathcal{A}$.

1. On définit $\limsup(A_n)_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m$ (intuitivement, $\limsup(A_n)_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que ω appartienne à une infinité de A_n).

2. On définit $\liminf(A_n)_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m$ (intuitivement, $\liminf(A_n)_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que ω appartienne à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux).

Exemple.

Cas des suites croissantes et décroissantes d'ensembles.

Théorème (Théorème d'extension de Hahn - Caratheodory)**.** *Si Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ une algèbre sur Ω, et ν une application de $\mathcal{F}$ dans $[0,+\infty]$ additive (telle que $\nu(A\cup B) = \nu(A)+\nu(B)$ pour $A\cup B = \emptyset$), alors si $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{F}$, il existe une mesure $\widehat{\nu}$ sur la tribu $\mathcal{A}$ qui coïncide avec ν sur $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire que pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\widehat{\nu(F)} = \nu(F)$). On dit que $\widehat{\nu}$ prolonge ν sur la tribu $\mathcal{A}$.*

Exemple.

Définition de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$,...

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Pour $A \in \mathcal{A}$, on dit que A est μ-négligeable si $\mu(A) = 0$.

2. Soit une propriété $\mathcal{P}$ dépendant des éléments ω de Ω. On dit que $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque partout (μ-presque sûrement sur un espace probabilisé) si l'ensemble des ω pour laquelle elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.

Exemple.

- Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$.
- La propriété " la suite de fonction $f_n(x) = x^n$ converge vers la fonction $f(x) = 0$" est vraie λ-presque partout sur $[0,1]$.
- Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ et soit F la fonction définie par $F(x) = \mu(]-\infty, x])$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Fonctions mesurables

Rappel. Soit $f : E \mapsto F$, où E et F sont 2 espaces métriques.

- Pour $I \subset F$, on appelle ensemble réciproque de I par f, l'ensemble $f^{-1}(I) = \{x \in E, f(x) \in I\}$.
- (f continue) $\Longleftrightarrow$ (pour tout ouvert U de F alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E).

Définition. Soit $f : E \mapsto F$ et soit $\mathcal{I}$ une tribu sur F. On note $f^{-1}(\mathcal{I})$ l'ensemble de sous-ensembles de Ω tel que $f^{-1}(\mathcal{I}) = \{f^{-1}(I), I \in \mathcal{I}\}$.

Propriété. *Soit $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espace mesurable et soit $f : \Omega \mapsto \Omega'$. Alors $f^{-1}(\mathcal{A})$ est une tribu sur Ω appelée tribu engendrée par f.*

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : \Omega \mapsto \Omega'$ est dite mesurable pour les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$ (donc si et seulement si $\forall A' \in \mathcal{A}'$, alors $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$).

Exemple.

- Fonction indicatrice.
- Combinaison linéaire de fonctions indicatrices.

Remarque.

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, et si $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, alors si f est une fonction mesurable sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors f est une variable aléatoire.

Exemple.

Nombre de Piles dans un jeu de Pile/Face.

Remarque.

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, et si $f : \Omega \mapsto (\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$, où Ω' est un espace métrique et $\mathcal{B}(\Omega')$ l'ensemble des boréliens de Ω', si f est une fonction mesurable sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\Omega')$, alors f est dite fonction borélienne.

Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables et $f : \Omega \mapsto \Omega'$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de Ω' telle que $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}'$. Alors*

1. *$f^{-1}(\mathcal{F})$ engendre la tribu $f^{-1}(\mathcal{A})$.*
2. *(f mesurable) $\Longleftrightarrow$ ($f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$)*

Conséquence.

- Si $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ sont deux espaces mesurables boréliens, alors toute application continue de $\Omega \mapsto \Omega'$ est mesurable.
- Pour montrer qu'une fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est mesurable, il suffit de montrer que la famille d'ensemble $(\{\omega \in \Omega, f(\omega) \leq a\})_{a \in \mathbb{R}} \in \mathcal{A}$.

Propriété.

- *Soit f mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$ et g mesurable de $(\Omega', \mathcal{A}')$ dans $(\Omega'', \mathcal{A}'')$. Alors $g_0 f$ est mesurable dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.*
- *Soit f_1 mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et f_2 mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Alors $h : \Omega \mapsto \Omega_1 \times \Omega_2$ telle que $h(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.*
- *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$, où Ω' est un espace métrique, telle qu'il existe une fonction f limite simple de (f_n) (donc $\forall \omega \in \Omega$, $\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$). Alors f est mesurable dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\Omega')$.*

Définition. Soit f mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$ et soit $\mu_f : \mathcal{A}' \mapsto [0, +\infty]$ telle que pour tout $A' \in \mathcal{A}'$, on ait $\mu_f(A') = \mu(f^{-1}(A'))$. Alors μ_f est une mesure sur $(\Omega', \mathcal{A}')$ appelée mesure image de μ par f.

Cas particulier.

Si μ est une mesure de probabilité et si X est une variable aléatoire alors μ_X est la mesure (loi) de probabilité de la variable aléatoire X.

Cas des fonctions réelles mesurables

Propriété. *Soit f et g deux fonctions réelles mesurables (de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$). Alors $\alpha.f$, $f+g$, $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont des fonctions réelles mesurables.*

Propriété. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles mesurables. Alors $\inf(f_n)$ et $\sup(f_n)$ sont des fonctions réelles mesurables.*

Définition. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Alors f est dite étagée s'il existe une famille d'ensembles disjoints $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de Ω et une famille de réels $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ telles que pour tout $\omega \in \Omega$, on ait $f(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega)$.

Remarque.

Si les A_i sont tous dans $\mathcal{A}$ tribu sur Ω, alors f est $\mathcal{A}$-mesurable.

Théorème. *Toute fonction réelle mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées.*

Conséquence. Soit f une fonction réelle mesurable. Alors f est limite simple de fonctions étagées.

Intégration de Lebesgue

Dans toute la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Intégrale de Lebesgue d'une fonction positive

Définition. 1. Soit $f = \mathbb{I}_a$, où $A \in \mathcal{A}$. Alors :

$$\int f\, d\mu = \int_{\omega} f(\omega) d\mu(\omega) = \mu(A).$$

2. Soit $f = \mathbb{I}_a$, où $A \in \mathcal{A}$ et soit $B \in \mathcal{A}$. Alors :

$$\int_B f\, d\mu = \int_B f(\omega) d\mu(\omega) = \int \mathbb{I}_B \mu(A)(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) = \mu(A \cap B).$$

3. Soit f une fonction étagée positive telle que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$, où les $A_i \in \mathcal{A}$ et $\alpha_i > 0$ et soit $B \in \mathcal{A}$. Alors :

$$\int_B f\, d\mu = \int_B f(\omega) d\mu(\omega) = \int \mathbb{I}_B(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B).$$

Exemple.

Fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$, fonctions en escalier,...

Définition. Soit f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive et soit $B \in \mathcal{A}$. Alors l'intégrale de Lebesgue de f par rapport à μ sur B est :

$$\int_B f\, d\mu = \int \mathbb{I}_B(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) = \sup \left\{ \int_B g\, d\mu, \text{ pour } g \text{ étagée positive telle que } g \leq f \right\}.$$

Propriété. *Soit f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive et soit A et $B \in \mathcal{A}$. Alors :*

1. *Pour* $c \geq 0$, $\displaystyle\int_B cf\,d\mu = c\int_B f\,d\mu$.

2. *Si* $A \subset B$, *alors* $\displaystyle\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu$.

3. *Si* g *est une fonction* $\mathcal{A}$*-mesurable positive telle que* $0 \leq f \leq g$ *alors* $0 \leq \displaystyle\int_B f\,d\mu \leq \int_B g\,d\mu$.

4. *Si* $\mu(B) = 0$ *alors* $\displaystyle\int_B f\,d\mu = 0$.

Théorème (Théorème de convergence monotone (Beppo-Lévi))**.** *Si* $(f_n)_n$ *est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers* f *sur* Ω, *alors :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int f_n d\mu\right) = \int f\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Conséquence. Pour les séries de fonctions mesurables positives, on peut toujours appliquer le Théorème de convergence monotone et donc inverser la somme et l'intégrale.

Lemme (Lemme de Fatou)**.** *Soit* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions mesurables positives alors :*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Exemple.

Appliquer Fatou à (f_n) telle que $f_{2n} = \mathbb{I}_A$ et $f_{2n+1} = \mathbb{I}_B$.

Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle et propriétés

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $B \in \mathcal{A}$ et soit f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable à valeurs réelles telle que $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. On dit que f est μ-intégrable sur B si $\displaystyle\int_B |f|\,d\mu < +\infty$. On a alors

$$\int_B f\,d\mu = \int_B f^+\,d\mu - \int_B f^-\,d\mu.$$

Notation. Lorsque f est μ-intégrable sur B, soit $\displaystyle\int |f|\,d\mu < +\infty$, on note $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (on dit que f est $\mathcal{L}^1$).

Exemple.

Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue.
Cas de la masse de Dirac.

Propriété. *On suppose que* f *et* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Alors :*

1. $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$ *pour* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

2. *Si* $f \leq g$ *alors* $\displaystyle\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

Théorème (Théorème de convergence dominée de Lebesgue). *Soit $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ avec $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si on suppose que (f_n) converge simplement vers f sur Ω alors :*

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f \, d\mu.$$

Extension.

Le Théorème de Lebesgue s'applique également dans le cas où $(f_n)_n$ converge presque partout vers f.

Exemple.

Convergence d'intégrale dépendant d'un paramètre : par exemple $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{1+x^n} dx$.

Théorème (Inégalité de Jensen). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mesurable telle que $\phi(f)$ soit une fonction intégrable par rapport à P. Alors :*

$$\phi\left(\int f \, dP\right) \leq \int \phi(f) \, dP.$$

Exemple.

Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors $\phi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left(\phi(X)\right)$.

Mesures induites et densités

Théorème (Théorème du Transport). *Soit f une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$ telle que μ_f soit la mesure induite par f (donc $\mu_f(A') = \mu(f^{-1}(A'))$ pour $A' \in \mathcal{A}'$) et soit ϕ une fonction mesurable de $(\Omega', \mathcal{A}')$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors, si $\phi_0 f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,*

$$\int_{\Omega'} \phi \, d\mu_f = \int_\Omega \phi_0 f \, d\mu.$$

Définition. Soit μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On dit que μ domine ν (ou ν est dominée par μ) et que ν est absolument continue par rapport à μ lorsque pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$.

Propriété. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ mesurable et positive. On suppose que pour $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \displaystyle\int_A f \, d\mu$. Alors, ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, dominée par μ. De plus, pour toute fonction g définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ mesurable et positive,*

$$\int g d\nu = \int g.f d\mu.$$

Enfin, g est ν intégrable si et seulement si $g.f$ est μ intégrable.

Définition. On dit que μ mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est σ-finie lorsqu'il existe une famille $(A_i)_{i \in I}$, avec I dénombrable, d'ensembles de $\mathcal{A}$ telle que $\bigcup A_i = \Omega$ et $\mu(A_i) < +\infty$ pour tout $i \in I$.

Théorème (Théorème de Radon-Nikodym). *On suppose que μ et ν sont deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telles que μ domine ν. Alors il existe une fonction f définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ mesurable et positive, appelée densité de ν par rapport à μ, telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \displaystyle\int_A f \, d\mu$.*

Théorème (Théorème de Fubini). *Soit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ (mesures σ finies), où $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ sont des espaces mesurés. Soit une fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-mesurable et μ-intégrable. alors :*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)\right) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1)\right) d\mu_2(\omega_2).$$

Espaces $\mathcal{L}^p$

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On appelle espace $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, où $p > 0$, l'ensemble des fonctions $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, mesurables et telles que $\int |f|^p d\mu < +\infty$.

Définition. Pour $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, où $p > 0$, on note $\| f \|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

Propriété (Inégalité de Hölder)**.** *Soit* $p > 1$ *et* $q > 1$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *et soit* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Alors,* $f\,g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et*

$$\| f\,g \|_1 \leq \| f \|_p \, . \, \| g \|_q \, .$$

Propriété (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit* $p > 1$ *et soit* f *et* $g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Alors,* $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et*

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p \, .$$

Remarque.

Pour $p > 1$, $\| \, . \, \|_p$ définie ainsi sur une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Pour obtenir une norme, il faut se placer dans l'espace $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ obtenu en "quotientant" $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ par la relation d'équivalence $f = g$ μ-presque partout (c'est-à-dire que dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on dira que $f = g$ lorsque $f = g$ μ-presque partout).

Définition. Pour f et $g \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on définit le produit scalaire $< f, g > = \displaystyle\int f.g \, d\mu$. On muni ainsi $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ d'une structure d'espace de Hilbert. On dira que f est orthogonale à g lorsque $< f, g > = 0$.

Conséquence. Si A est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (par exemple un sous-espace de dimension finie), alors pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, il existe un unique projeté orthogonal de f sur A, noté f_A, qui vérifie $f_A = \operatorname*{Arginf}_{g \in A} \| g - f \|_2$.