Troisième Année Licence M.I.A.S.H.S. $2024-2025$

Statistique 2

Examen terminal, Mai 2025

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 10 points)

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution uniforme sur $[0,1]$. Pour $m \in [0,1/2]$, on définit $Y = |X-m|$.

1. Prouver que pour tout $m \in [0,1/2]$, $\mathbb{E}[Y] = m^2 - m + 1/2$ **(1pt)**.
2. Déterminer la fonction de répartition de Y **(1 pt)** et en déduire que Y est une variable aléatoire absolument continue de densité $f_Y(y) = 2$ pour $y \in [0,m]$, $f_Y(y) = 1$ pour $y \in]m, 1-m]$ et $f_Y(y) = 0$ ailleurs **(0.5pts)**.
3. Supposons que m est inconnu et que $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. observées suivant la même distribution que Y. Avec $\overline{Y}_n$ la moyenne empirique de $(Y_1, \ldots, Y_n)$, montrer que $\overline{m}_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{|4\,\overline{Y}_n - 1|}\Big)$ est un estimateur convergent de m **(1.5pts)**. Montrer que $\mathrm{var}(Y) = \frac{1}{12} - m^2(1-m)^2$ **(1pt)**. En déduire que pour $m \in [0,1/2[$, $\overline{m}_n$ vérifie un théorème central limite que l'on précisera **(2pts)**.
4. On définit un second estimateur $\widehat{m}_n = 1 - \max(Y_1, \ldots, Y_n)$ de m. Montrer que $\mathbb{P}(m \le \widehat{m}_n \le m + \varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon)^n$ pour $0 \le \varepsilon \le 1 - 2m$ **(1pt)**. Déduisez un intervalle de confiance de niveau 95% pour m **(0.5pts)**.
5. Démontrer que $n\,(\widehat{m}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$, loi exponentielle de paramètre 1 **(1.5pts)**.

Proof. 1. Pour tout $m \in [0,1/2]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X-m|] &= \int_0^m (m-x)\,dx + \int_m^1 (x-m)\,dx \\
&= \big[mx - \frac{1}{2}x^2\big]_0^m + \big[-mx + \frac{1}{2}x^2\big]_m^1 \\
&= m^2 - \frac{1}{2}m^2 - m + \frac{1}{2} + m^2 - \frac{1}{2}m^2 \\
&= m^2 - m + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Puisque $m \in [0,1/2]$, $|X-m| \in [0, 1-m]$. Donc, pour $y < 0$, $F_Y(y) = 0$ et $y \ge 1-m$, $F_Y(y) = 1$. Enfin, pour $0 \le y \le 1-m$,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}\big(-y \le X - m \le y\big) \\
&= \mathbb{P}\big(m - y \le X \le y + m\big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $F_Y(y) = \mathbb{P}\big(m-y \le X \le y+m\big) = 2y$ if $0 \le y \le m$ et $F_Y(y) = \mathbb{P}\big(0 \le X \le y+m\big) = y+m$ if $m \le y \le 1-m$.

Il est clair que la fonction $y \in \mathbf{R} \mapsto F_Y(y)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Donc, Y est une variable absolument continue et sa densité de probabilité est donnée par sa dérivée (sauf aux points non différentiables: 0, m et $1-m$). Par conséquent, on peut choisir que $f_Y(y) = 2$ pour $y \in [0,m]$, $f_Y(y) = 1$ pour $y \in (m, 1-m]$ et $f_Y(y) = 0$ ailleurs.

3. Il est clair que $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une suite de v.a.i.i.d. telle que $\mathbb{E}[|Y_1|] < \infty$ donc la loi forte des grands nombres peut être appliquée et nous obtenons $\overline{Y}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}[Y_1]$. Considérons alors la fonction $g : y \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{\big|4\,y - 1\big|}\Big)$ qui est continue. Alors $g(\overline{Y}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} g(\mathbb{E}[Y_1])$. Comme $\mathbb{E}[Y_1] \ge 1/4$, $\big|4\,\mathbb{E}[Y_1] - 1\big| = 4(m^2 - m + \frac{1}{2}) - 1 = (1-2m)^2$ et donc $g(\mathbb{E}[Y_1]) = m$, ce qui implique que $g(\overline{Y}_n) = \overline{m}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m$: l'estimateur est convergent.
Il suffit de calculer $\mathrm{var}(Y_1) = \mathbb{E}\big[Y_1^2\big] - \mathbb{E}[Y_1]^2 = \int_0^1 (x-m)^2\,dx - \big(m^2 - m + 1/2\big)^2 = 1/3 - m + m^2 - \big(m^2 - m + 1/2\big)^2 = \frac{1}{12} - m^2(1-m)^2$. On utilise ensuite la méthode Delta. Pour ce faire, on vérifie que la fonction g est classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1/4[\cup]1/4, 1/2]$ et $(g'(x))^2 = 1/|1-4x|$ ne s'annule pas sur $[0, 1/4[\cup]1/4, 1/2]$. Or $\mathbb{E}[Y] = (m-1/2)^2 + 1/4 > 1/4$ pour $m \in [0,1/2[$. D'où pour $m \in [0,1/2[$,

$$\sqrt{n}\big(\overline{m}_n - m\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0\,,\, \frac{1}{(1-2m)^2}\,\big(\frac{1}{12} - m^2(1-m)^2\big)\Big).$$

4. Puisque les Y_i prennent leurs valeurs dans $[0, 1-m]$, alors $\max(Y_1, \ldots, Y_n)$ prend aussi ses valeurs dans $[0, 1-m]$, ce qui implique que $\widehat{m}_n$ prend ses valeurs dans $[m, 1]$.
Soit $0 \leq \varepsilon \leq 1-2m$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(m \leq \widehat{m}_n \leq m+\varepsilon\big) &= \mathbb{P}\big(\widehat{m}_n \leq m+\varepsilon\big) \quad \text{puisque } \widehat{m}_n \text{ prend ses valeurs dans } [m,1] \\
&= 1 - \mathbb{P}\big(1 - \max(Y_1, \ldots, Y_n) > m+\varepsilon\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\big(\max(Y_1, \ldots, Y_n) < 1-m-\varepsilon\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\big(Y < 1-m-\varepsilon\big)^n \quad \text{puisque } (Y_i) \text{ v.a.i.i.d.}
\end{aligned}$$

Avec $0 \leq \varepsilon \leq 1-2m$ on a $m \leq 1-m-\varepsilon \leq 1-m$ et donc $\mathbb{P}\big(Y < 1-m-\varepsilon\big) = F_Y(1-m-\varepsilon) = 1-m-\varepsilon+m = 1-\varepsilon$. D'où le résultat.

De $\mathbb{P}\big(m \leq \widehat{m}_n \leq m+\varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(\widehat{m}_n - \varepsilon \leq m \leq \widehat{m}_n\big) = 1-(1-\varepsilon)^n$, on déduit que si $1-(1-\varepsilon)^n = 0.95$ alors $\big[\widehat{m}_n - \varepsilon\,,\, \widehat{m}_n\big]$ est un intervalle de confiance de niveau 95% pour m. Cela implique que $(1-\varepsilon)^n = 0,05$ et donc $\varepsilon = 1-0,05^{1/n}$. Par conséquent, $\varepsilon = 1-0,05^{1/n}$. $\big[\widehat{m}_n - 1 + 0.05^{1/n}\,,\, \widehat{m}_n\big]$ est un intervalle de confiance à 95%.

5. D'après la question 4, avec $x = n\,\varepsilon \geq 0$, soit $\varepsilon = x/n$,

$$\mathbb{P}\big(n\,(\widehat{m}_n - m) \leq n\,\varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(n\,(\widehat{m}_n - m) \leq x\big) = 1-(1-x/n)^n = 1 - e^{n\,\log(1-x/n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-e^{-x},$$

puisque $log(1-x/n) \sim -x/n$ lorsque $n \to \infty$. Mais pour $x \geq 0$, $1-e^{-x}$ est la fonction de distribution cumulative d'une distribution $\mathcal{E}(1)$. Par conséquent $n\,(\widehat{m}_n - m) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{E}(1)$.

□

Exercice 2 (Sur 16 points)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, d'espérance m et de variance σ^2, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ a une matrice de covariance $\Gamma_n = (\gamma_{ij}^{(n)})_{1\leq i,j\leq n}$ définie positive.

1. Que vaut $\gamma_{11}^{(n)}$ **(0.5pts)**? Montrer que $|\gamma_{ij}^{(n)}| \leq \sigma^2$ pour tout $1 \leq i,j \leq n$ **(0.5pts)**.

2. On note $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$ **(0.5pts)** et montrer que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} + \dfrac{2}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \gamma_{ij}^{(n)}$ **(0.5pts)**.

3. On suppose désormais qu'il existe une fonction $r : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ telle que $\gamma_{ij}^{(n)} = r(|j-i|)$ pour tout $1 \leq i,j \leq n$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$ et on suppose que $\sum_{k=0}^{\infty} |r(k)| < \infty$. Montrer que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1-\frac{k}{n})\, r(k)$ **(1.5pts)**. En écrivant que $\sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} + \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}$, montrer que $n\,\mathrm{var}(\overline{X}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r(k)$ **(2pts)**. En déduire que $\overline{X}_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} m$ **(0.5pts)**.

4. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes. Montrer que si les suites $(\mathbb{E}[Z_n])_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathrm{var}(Z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent, alors $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers une loi que l'on précisera **(1pt)**.

5. On suppose désormais que la suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est telle que le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est gaussien pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - m)$ converge en loi vers une limite que l'on précisera **(1pt)**.

6. On suppose que $(X_1, \ldots, X_n)$ est observé avec Γ_n connue, mais m inconnue et on veut estimer m. Montrer que maximiser la vraisemblance du modèle en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ revient à minimiser ${}^t(x - m\,\mathbb{1}_n)\,\Gamma_n^{-1}(x - m\,\mathbb{1}_n)$, où $\mathbb{1}_n = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$ **(1pt)**. En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{m}_n$ de m est unique et:

$$\widehat{m}_n = ({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n)^{-1}\,{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\,{}^t(X_1, \ldots, X_n) \quad \textbf{(2pts)}.$$

7. Montrer que $\widehat{m}_n$ est un estimateur sans biais **(0.5pts)** et déterminer sous forme matricielle la variance de $\widehat{m}_n$ **(1pt)**.

8. Ecrire également $\mathrm{var}(\overline{X}_n)$ sous forme matricielle en utilisant Γ_n et $\mathbb{1}_n$ **(1pt)**. Montrer que pour tout vecteur $U \in \mathbf{R}^n$, $({}^t U\,U)^2 \leq ({}^t U\,\Gamma_n\,U)\,({}^t U\,\Gamma_n^{-1}\,U)$ **(1.5pts)**. En déduire que $\mathrm{var}(\widehat{m}_n) \leq \mathrm{var}(\overline{X}_n)$ **(1pt)**.

Proof. 1. On a $\gamma_{11}^{(n)} = \mathrm{var}(X_1) = \sigma^2$.
D'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\gamma_{ij}^{(n)}| = |\mathrm{cov}(X_i, X_j)| \leq \sqrt{\mathrm{var}(X_i)\mathrm{var}(X_j)} = \sigma^2$.

2. On a $\mathbb{E}\big[\overline{X}_n\big] = m$.
Et d'une manière générale $\mathrm{var}\big(\overline{X}_n\big) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kk}^{(n)} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \gamma_{ij}^{(n)}\right)$ d'où le résultat.

3. On a $\mathrm{var}\big(\overline{X}_n\big) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n} r(j-i)$. Mais pour $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, il y a $n-k$ couples (i,j) avec $i<j$ tels que $j-i=k$. Donc $\mathrm{var}\big(\overline{X}_n\big) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq k\leq n-1}(n-k)r(k)$, d'où le résultat.
Pour $k\in\{1,\ldots,[\sqrt{n}]\}$, alors $\frac{k}{n}\leq\frac{\sqrt{n}}{n}$, donc $\left|\sum_{1\leq k\leq[\sqrt{n}]}\frac{k}{n}r(k)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leq k\leq[\sqrt{n}]}|r(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leq k\leq\infty}|r(k)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour $k\in\{[\sqrt{n}]+1,\ldots,n\}$, alors $\frac{k}{n}\leq 1$, donc $\left|\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}\frac{k}{n}r(k)\right| \leq \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}|r(k)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ comme reste d'une série convergente.
De ces deux points, on en déduit que $\sum_{k=1}^{}n\frac{k}{n}r(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $n\,\mathrm{var}\big(\overline{X}_n\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}r(k)$.
De ce qui précède $\mathrm{var}\big(\overline{X}_n\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après l'Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, $\overline{X}_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} m$.

4. Il suffit de considérer la fonction caractéristique de Z_n qui s'écrit $\phi_{Z_n}(u) = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{var}(Z_n)\,u^2 + i\,u\,\mathbb{E}[Z_n]}$. Si $\mathbb{E}[Z_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m_Z$ et $\mathrm{var}(Z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma_Z^2$ alors il est clair que pour tout $u\in\mathbf{R}$, $\phi_{Z_n}(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}\sigma_Z^2\,u^2 + i\,u\,m_Z}$, donc $Z_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(m_Z\,,\,\sigma_Z^2)$.

5. Si on considère $Z_n = n\,(\overline{X}_n - m)$, on sait que $\overline{X}_n$ est une v.a. gaussienne comme combinaison linéaire issu du vecteur gaussien $(X_1,\ldots,X_n)$, donc Z_n est une v.a. gaussienne, comme transformation affine d'une v.a. gaussienne. De plus $\mathbb{E}[Z_n]=0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, et $\mathrm{var}(Z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}r(k)$ d'après la question 3. Donc $n\,(\overline{X}_n - m) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\Big(0\,,\,\sigma^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}r(k)\Big)$.

6. On a donc $(X_1,\ldots,X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\big(m\,\mathbb{1}_n\,,\,\Gamma_n\big)$. Comme Γ_n est définie positive, on peut donc écrire que la densité de $(X_1,\ldots,X_n)$ en x vaut:

$$\begin{aligned} f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x) &= \frac{1}{(2\,\pi)^{n/2}\det(\Gamma_n)^{1/2}}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\,{}^t(x-m\,\mathbb{1}_n)\,\Gamma_n^{-1}(x-m\,\mathbb{1}_n)\Big) \\ \Longrightarrow\ \log\big(f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x)\big) &= -\frac{n}{2}\,\log(2\pi) - \frac{1}{2}\,\log(\det(\Gamma_n)) - \frac{1}{2}\,{}^t(x-m\,\mathbb{1}_n)\,\Gamma_n^{-1}(x-m\,\mathbb{1}_n). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes ne dépendent pas de m. On veut donc maximiser le troisième terme en maximisant la vraisemblance ce qui revient à minimiser ${}^t(x-m\,\mathbb{1}_n)\,\Gamma_n^{-1}(x-m\,\mathbb{1}_n)$.
En dérivant ${}^t(x-m\,\mathbb{1}_n)\,\Gamma_n^{-1}(x-m\,\mathbb{1}_n)$ par rapport à m, on obtient $-{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}(x-m\,\mathbb{1}_n) - {}^t(x-m\,\mathbb{1}_n)\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n = -2{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}(x-m\,\mathbb{1}_n)$.
En remplaçant x par ${}^t(X_1,\ldots,X_n)$ et en cherchant les points critiques on obtient:

$${}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1\,t}(X_1,\ldots,X_n) = m\,{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n \quad\Longrightarrow\quad m = \big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1\,t}(X_1,\ldots,X_n),$$

puisque la matrice est inversible du fait que Γ_n^{-1} est définie positive comme Γ_n.
Par ailleurs, si on dérive une seconde fois par rapport à m, on obtient $2{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n > 0$, donc la fonction est convexe et admet donc le point critique comme unique minimum local donc comme unique minimum absolu.

7. On a $(X_1,\ldots,X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\big(m\,\mathbb{1}_n\,,\,\Gamma_n\big)$. Par conséquent,

• $\mathbb{E}\big[\widehat{m}_n\big] = \big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\,\mathbb{E}\big[{}^t\big(X_1,\ldots,X_n\big)\big] = m\,\big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\,\mathbb{1}_n = m$: estimateur sans biais.
• $\mathrm{var}\big(\widehat{m}_n\big) = \mathrm{cov}\Big(\big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1\,t}(X_1,\ldots,X_n)\Big) = \big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathrm{cov}\big((X_1,\ldots,X_n)\big)^t\Big(\big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\Big)$
$= \big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\Gamma_n\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1} = \big({}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n^{-1}\mathbb{1}_n\big)^{-1}$.

8. $\mathrm{var}\big(\overline{X}_n\big) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{cov}\big({}^t\mathbb{1}_n\,{}^t(X_1,\ldots,X_n)\big) = \frac{1}{n^2}\,{}^t\mathbb{1}_n\mathrm{cov}\big({}^t(X_1,\ldots,X_n)\big)\,\mathbb{1}_n = \frac{1}{n^2}\,{}^t\mathbb{1}_n\,\Gamma_n\,\mathbb{1}_n$.
Considérons le produit scalaire $<U,V>={}^tU\,V$. Notons $\Gamma_n^{1/2}$ et $\Gamma_n^{-1/2}$ les matrices obtenues à partir de la diagonalisation de Γ_n en prenant les puissances $1/2$ et $-1/2$ des valeurs propres (toutes >0). Alors en appliquant Cauchy-Schwarz:

$$<U,U>^2 = <\Gamma_n^{1/2}\,U,\Gamma_n^{-1/2}\,U>^2 \leq <\Gamma_n^{1/2}\,U,\Gamma_n^{1/2}\,U><\Gamma_n^{-1/2}\,U,\Gamma_n^{-1/2}\,U>\,.$$

En réécrivant, on obtient le résultat demandé.
Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à $U=\mathbb{1}_n$.

□