

Troisième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2025 – 2026

## Statistique 2

Contrôle Continu 2, Avril 2026

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

### Exercice 1 (Sur 3 points)

Soit  $X$  une variable de Bernoulli de paramètre  $1/2$  et soit  $(Y_n)$  une suite de v.a. telle que pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $Y_n$  suit une loi exponentielle de paramètre  $n$ . Déterminer la limite en probabilité de  $(Z_n)$  avec  $Z_n = X + Y_n$  pour  $n \in \mathbf{N}$ .

*Proof.* On a  $\mathbb{E}[|Z_n - X|] = \mathbb{E}[|Y_n|] = \mathbb{E}[Y_n] = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Donc  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} X$  car la convergence dans  $\mathbb{L}^1$  entraîne la convergence en probabilités.  $\square$

### Exercice 2 (Sur 12 points)

On considère les mesures de probabilité  $\mu$ , distinctes d'une mesure de Dirac, vérifiant la propriété **S** suivante:

"Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi  $\mu$ , alors pour tout  $a, b \in \mathbf{R}$ , il existe  $c \in \mathbf{R}$  dépendant uniquement de  $a$  et de  $b$  tel que  $aX + bY$  a la même loi que  $cZ$  où  $Z$  est une variable aléatoire de loi  $\mu$ "

1. Montrer que si  $\mu$  est la loi de probabilité  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2 > 0$  alors la propriété **S** est vérifiée (**1pt**).
2. Dans toute la suite on suppose  $X$  est une variable aléatoire ayant pour loi  $\mu$  vérifiant **S** et on note  $\psi_X$  sa fonction caractéristique. Montrer que  $\psi_X(u) \psi_X(-u) = |\psi_X(u)|^2$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$  (**1pt**) et en déduire que  $\psi_X$  est une fonction réelle, positive et paire (**2pts**).
3. On peut montrer (ne pas le faire) que la propriété **S** implique qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$  tel que pour tout  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\psi_X(u) = \exp(\beta |u|^\alpha)$ . Montrer que l'on a nécessairement  $\beta < 0$  (**1pt**) et  $\alpha > 0$  (**1pt**). En utilisant les dérivées de  $\psi$ , montrer que si  $\alpha \leq 1$ , alors  $\mathbb{E}[|X|] = \infty$  et si  $\alpha > 1$ , alors  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  et  $\mathbb{E}[X] = 0$  (**1pt**). Enfin, montrer que  $\alpha \leq 2$  (**1.5pts**). Quelle est la loi  $\mu$  si  $\alpha = 2$  (**0.5pts**)?
4. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une suite de v.a.i.i.d. de fonction caractéristique  $\psi_X$ . Pour  $\gamma > 0$ , démontrer que  $Z_n = \frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^n X_k$  a la même loi que  $cX_0$ , où l'on précisera  $c$  en fonction de  $n, \alpha$  et  $\beta$  (**1pt**). Pour quelle valeur de  $\gamma$ ,  $Z_n$  converge-t-elle en loi (**1.5pts**)? Si  $\alpha = 1$ , en déduire la convergence en loi de  $\overline{X}_n$  (**0.5pts**). La loi faible des grands nombres est-elle alors vérifiée (**0.5pts**)? Et si  $\alpha > 1$  (**0.5pts**).

*Proof.* 1. Soit  $X$  et  $Y$  indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Alors  $\alpha X + \beta Y \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2)$ . Donc pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\alpha X + \beta Y \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} Z$ : la propriété **S** est vraie avec  $c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

2. On a  $\psi_X(-u) = \mathbb{E}[e^{-iuX}] = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \overline{\mathbb{E}[e^{iuX}]} = \overline{\psi_X(u)}$ . Par conséquent,  $\psi_X(-u) \psi_X(u) = \overline{\psi_X(u)} \psi_X(u) = |\psi_X(u)|^2$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$ .

Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de même loi que  $X$ , alors il existe  $c \in \mathbf{R}$ , tel que  $X - Y$  a la même loi que  $cX$ . Or pour  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\phi_{X-Y}(u) = \mathbb{E}[e^{iuX} e^{-iuY}] = \mathbb{E}[e^{iuX}] \mathbb{E}[e^{-iuY}] = \mathbb{E}[e^{iuX}] \mathbb{E}[e^{-iuX}]$  par indépendance et parce que  $Y$  a la même loi que  $X$ . On en conclut que  $\phi_{X-Y}(u) = |\psi_X(u)|^2$ . Donc comme  $\psi_{cX}(u) = \psi_X(cu)$ , on en déduit que pour tout  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\psi_X(u) = |\psi_X(u/c)|^2$ : la fonction  $\psi_X$  est réelle positive. De plus, on a  $\psi_X(-u) = |\psi_X(-u/c)|^2 = |\overline{\psi_X(u/c)}|^2 = |\psi_X(u/c)|^2 = \psi_X(-u)$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$ : la fonction  $\psi_X$  est paire.

3. Si  $\psi_X(u) = \exp(\beta |u|^\alpha)$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$  alors quand  $\beta > 0$  alors  $\psi_X(u) > 1$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$ . Mais on sait que  $|\psi_X(u)| \leq \mathbb{E}[|e^{iuX}|] \leq 1$ , ce n'est donc pas possible. Donc  $\beta \leq 0$ . Et si  $\beta = 0$  alors  $\psi_X(u) = 1$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$ , fonction caractéristique de la variable aléatoire qui vaut p.s. 0: pas possible car  $\mu$  n'est pas une masse de Dirac.  
Si  $\alpha < 0$ , avec  $\beta < 0$ , alors  $\exp(\beta |u|^\alpha) \rightarrow 0$  quand  $u \rightarrow 0$ . Or on sait que  $\phi_X$  est une fonction continue et  $\psi_X(0) = 1$ . Ce n'est donc pas possible et on a donc  $\alpha \geq 0$ . Et si  $\alpha = 0$ , alors  $\psi_X(0) = 1$  si et seulement si  $\beta = 0$ , ce qui n'est pas possible. Donc  $\alpha > 0$ .  
On sait que si  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  alors  $\psi'(0) = i\mathbb{E}[X]$ . Or si  $\alpha \leq 1$ , alors  $\psi$  n'est pas différentiable en 0 car  $u \in \mathbf{R} \mapsto |u|^\alpha$  ne l'est pas. Par

conséquence,  $\mathbb{E}[|X|] = \infty$ . Si  $\alpha > 1$ , alors  $u \rightarrow \psi_X(u)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$  et  $\psi'_X(u) = \alpha \beta |u|^{\alpha-1} \psi_X(u)$ , donc  $\psi'_X(0) = 0$  et ainsi  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  et  $\mathbb{E}[X] = 0$ .

Enfin, si  $\alpha > 2$  alors  $\psi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\mathbb{E}[X^2] = -\psi''_X(0)$ . Mais  $\psi''(X) = \alpha \beta \psi_X(u) (\alpha \beta |u|^{2\alpha-2} + (\alpha-1)|u|^{\alpha-2})$ , soit  $\mathbb{E}[X^2] = 0$ , ce qui implique à nouveau que  $X = 0$  p.s., ce qui n'est pas possible. Donc  $\alpha \leq 2$ .

Pour  $\alpha = 2$ , alors  $X$  suit une loi normale centrée.

4. On a, grâce à l'indépendance et la propriété **S**,  $\psi_{Z_n}(u) = \mathbb{E}\left[e^{i \frac{u}{n^\gamma} \sum_{k=1}^n X_k}\right] = \psi_X(u/n^\gamma)^n = e^{\beta n^{1-\alpha\gamma} |u|^\alpha} = \psi_{cX}(u)$  avec  $c = n^{1/\alpha-\gamma}$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$ .

Il est clair que si  $1 - \alpha\gamma > 0$ , soit  $\gamma < 1/\alpha$ , alors  $n^{1-\alpha\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ : pas de limite. En revanche, si  $\gamma = 1/\alpha$ , alors  $\psi_{Z_n}(u) = \psi_X(u)$ :

pour tout  $n$ ,  $Z_n \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X$ . Et si  $\gamma > 1/\alpha$ , alors  $n^{1-\alpha\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $e^{\beta n^{1-\alpha\gamma} |u|^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$ :  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$ .

Si  $\gamma = \alpha = 1$ , alors  $Z_n \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X$ . Or, dans ce cas,  $Z_n = \bar{X}_n$ , donc pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\bar{X}_n \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X$ : il y a convergence en loi  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ ,

mais il ne peut pas y avoir  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \ell$  où  $\ell \in \mathbf{R}$  (sinon on aurait aussi  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \ell$ ). C'est le cas de la loi de Cauchy.

Si  $\alpha > 1$ , on a  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  et  $\mathbb{E}[X] = 0$ : on peut donc appliquer la loi faible des grands nombres et  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0$ . □

### Exercice 3 (Sur 16 points)

Soit  $(X, Y)$  un vecteur gaussien défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$  et soit  $S = X^2 + Y^2$ .

1. Montrer que  $S$  est une variable aléatoire **(0.5pts)**.
2. Montrer que si  $S$  appartient à un ouvert  $U$  de  $[0, +\infty[$  alors  $(X, Y)$  appartient à un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  **(0.5pts)**. Rappeler une condition (C) pour que  $(X, Y)$  suive une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^2$  **(1pt)**. Sous cette condition (S), en déduire que  $\mathbb{P}(S \in U) > 0$  **(1pt)** et déterminer  $S(\Omega)$  **(1pt)**. Montrer que  $S(\Omega)$  peut être différent si la condition (C) n'est pas vérifiée **(2pt)**.
3. On suppose désormais que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Déterminer la densité  $f_{(X,Y)}(x, y)$  du vecteur  $(X, Y)$  **(0.5pts)**.
4. Soit  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  mesurable bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}[g(S, X)] = \int_0^{+\infty} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} g(s, y) f_{(X,Y)}(\sqrt{s-y^2}, y) \frac{dy ds}{\sqrt{s-y^2}} \quad \text{(1.5pts)}.$$

En déduire que le vecteur aléatoire  $(S, Y)$  admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^2$ :

$$f_{(S,Y)}(s, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s-y^2}} e^{-s/2} \mathbb{I}_{|y| < \sqrt{s}} \quad \text{pour } (s, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \quad \text{(1pt)}.$$

5. En déduire que  $S$  suit une loi exponentielle de paramètre 1/2 **(2pts)**.
6. On considère un vecteur aléatoire  $(Z, \theta)$  où  $Z$  et  $\theta$  sont indépendantes de lois respectives exponentielle de paramètre 1/2 et uniforme sur  $[0, 2\pi]$ . Montrer que pour toute fonction  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  mesurable bornée

$$\mathbb{E}[g(\sqrt{Z} \cos(\theta), \sqrt{Z} \sin(\theta))] = \mathbb{E}[g(X, Y)] \quad \text{(2pts)}.$$

7. Si  $U_1$  et  $U_2$  sont 2 v.a. indépendantes de même loi uniforme sur  $]0, 1[$ , quelle est la loi du vecteur aléatoire  $(\sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2), \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2))$  (justifier) **(2.5pts)**. Quel est l'intérêt pratique de ce résultat **(0.5pts)**?

*Proof.* 1. On a  $S = g(X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont des v.a. et  $g(x, y) = x^2 + y^2$  est une fonction continue donc mesurable, donc  $S$  est également une v.a.

2. Comme  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, \infty[$  est continue, et que l'on sait que l'image réciproque d'un ouvert  $g^{-1}(U) = \{S \in U\} = \{g(X, Y) \in U\}$  par une application continue est un ouvert, on a bien  $(X, Y) \in U_2$ , ouvert de  $\mathbf{R}^2$ .

Par le cours, on sait que  $(X, Y)$  admet une densité par rapport à  $\lambda_2$  si et seulement si la matrice de variance-covariance de  $(X, Y)$  est de déterminant non nul, soit  $\text{var}(X) \text{var}(Y) > \text{cov}^2(X, Y)$ .

On en déduit que sous la condition (S),  $\mathbb{P}(S \in U) = \mathbb{P}((X, Y) \in U_2) = \int_{U_2} \int f_{(X,Y)}(x, y) d\lambda_2(x, y) > 0$  puisque  $\lambda_2(U_2) > 0$ . On peut aussi

écrire que l'ouvert  $U_2$  contient nécessairement un pavé  $]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[$  de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbb{P}((X, Y) \in U_2) \geq \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_{(X,Y)}(x, y) d\lambda_2(x, y) > 0$ . Si  $\mathbb{P}(S \in U) > 0$  pour tout ouvert  $U \in [0, \infty[$ , alors le support de la loi de  $S$  est  $S(\Omega) = [0, \infty[$ .

Si on choisit  $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y = 1 - X$ , le vecteur  $(X, Y)$  est bien gaussien et  $S = X^2 + Y^2 = X^2 + (1 - X)^2 = 2(X - 1/2)^2 + 1/2$ , donc  $S(\Omega) = [1/2, +\infty[$ , différent de  $[0, \infty[$ .

3. Les v.a.  $X$  et  $Y$  étant indépendantes la densité du couple est le produit des densités donc pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

4. On a, en utilisant la parité,

$$\mathbb{E}[g(S, Y)] = \mathbb{E}[g(X^2 + Y^2, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x^2 + y^2, y) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = 2 \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x^2 + y^2, y) f_{(X,Y)}(\sqrt{s - y^2}, y) dy \right) dx.$$

en utilisant Fubini. On effectue le changement de variables  $(s, y) = (x^2 + y^2, y)$ . D'où  $x = \sqrt{s - y^2}$  pour  $s \geq y^2$ , soit  $y \in [-\sqrt{s}, \sqrt{s}]$  puisque  $x \geq 0$ . On en déduit que  $dx = \frac{1}{2}(s - y^2)^{-1/2} ds$ , d'où

$$\mathbb{E}[g(S, Y)] = 2 \int_0^{\infty} \left( \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} g(s, y) \frac{1}{2} (s - y^2)^{-1/2} f_{(X,Y)}(\sqrt{s - y^2}, y) dy \right) ds,$$

d'où le résultat.

On en déduit que:

$$\mathbb{E}[g(S, Y)] = \int_0^{\infty} \left( \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} g(s, y) (s - y^2)^{-1/2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}s} dy \right) ds = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, y) \mathbb{I}_{y \in [-\sqrt{s}, \sqrt{s}]} (s - y^2)^{-1/2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}s} ds dy.$$

Comme ceci est valable pour toute fonction  $g$  bornée mesurable, on en déduit que le vecteur  $(S, Y)$  est de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$  et sa densité est  $f_{(S,Y)}(s, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s - y^2}} e^{-s/2} \mathbb{I}_{|y| < \sqrt{s}}$  pour  $(s, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ .

5. On a pour  $s \geq 0$ ,  $f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(S,Y)}(s, y) dy = \frac{e^{-s/2}}{2\pi} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} \frac{dy}{\sqrt{s - y^2}} = \frac{e^{-s/2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$  avec le changement de variable  $y = z\sqrt{s}$ .

Comme  $\int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = [\arcsin(z)]_{-1}^1 = \pi$ , on obtient la densité d'une loi exponentielle de paramètre  $1/2$ .

6. On considère  $(Z, \theta)$  tel que :

$$Z \sim \mathcal{E}(1/2), \quad \theta \sim \mathcal{U}[0, 2\pi], \quad Z \text{ et } \theta \text{ indépendantes}$$

Soit  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  mesurable bornée. Alors, par indépendance,

$$\mathbb{E}[g(\sqrt{Z} \cos \theta, \sqrt{Z} \sin \theta)] = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} g(\sqrt{z} \cos \theta, \sqrt{z} \sin \theta) \frac{1}{2} e^{-z/2} \frac{1}{2\pi} d\theta dz.$$

On effectue le changement de variables  $x = \sqrt{z} \cos(\theta)$  et  $y = \sqrt{z} \sin(\theta)$ , ceci impliquant que  $z = x^2 + y^2$ . La matrice jacobienne est  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{z}} \cos(\theta) & -\sqrt{z} \sin(\theta) \\ \frac{1}{2\sqrt{z}} \sin(\theta) & \sqrt{z} \cos(\theta) \end{pmatrix}$  dont le déterminant vaut  $\frac{1}{2}$ . On obtient alors :

$$\mathbb{E}[g(\sqrt{Z} \cos \theta, \sqrt{Z} \sin \theta)] = \int_{\mathbf{R}^2} g(x, y) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} e^{-(x^2+y^2)/2} \frac{1}{1/2} dx dy = \int_{\mathbf{R}^2} g(x, y) f_{(X,Y)}(x, y),$$

d'où

$$\mathbb{E}[g(\sqrt{Z} \cos \theta, \sqrt{Z} \sin \theta)] = \mathbb{E}[g(X, Y)].$$

7. Soit  $U_1, U_2$  indépendantes de loi uniforme sur  $]0, 1[$ . Posons  $Z = -2 \ln(U_1)$ ,  $\theta = 2\pi U_2$ . Il est clair que  $\theta \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$ . Par ailleurs,  $Z$  prend ses valeurs dans  $]0, \infty[$  puisque  $\ln(U_1) \in ]-\infty, 0[$ . Et pour  $z > 0$ ,  $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(-2 \ln(U_1) \leq z) = \mathbb{P}(U_1 \geq \exp(-z/2))$ . Comme la fonction de répartition de  $U_1$  est  $x$  pour  $x \in [0, 1]$ , on en déduit que  $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \exp(-z/2)$  qui est la fonction de répartition d'une loi  $\mathcal{E}(1/2)$ . Enfin, comme  $U_1$  et  $U_2$  sont indépendantes, alors  $\theta$  et  $Z$  sont indépendantes puisque  $\theta = h_1(U_1)$  et  $Z = h_2(U_2)$ . D'après la question précédente, on en déduit que  $(\sqrt{Z} \cos \theta, \sqrt{Z} \sin \theta) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, I_2)$ , donc

$$\left( \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2), \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \right) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, I_2).$$

L'intérêt de ce résultat sera donc de simuler 2 variables gaussiennes centrées réduites indépendantes à partir de 2 variables uniformes sur  $]0, 1[$  indépendantes. □