

Troisième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2025 – 2026

## Statistique 2

Contrôle Continu 2, Avril 2026

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

### Exercice 1 (Sur 3 points)

Soit  $X$  une variable de Bernoulli de paramètre  $1/2$  et soit  $(Y_n)$  une suite de v.a. telle que pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $Y_n$  suit une loi exponentielle de paramètre  $n$ . Déterminer la limite en probabilité de  $(Z_n)$  avec  $Z_n = X + Y_n$  pour  $n \in \mathbf{N}$ .

### Exercice 2 (Sur 13 points)

On considère les mesures de probabilité  $\mu$ , distinctes d'une mesure de Dirac, vérifiant la propriété **S** suivante:

"Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi  $\mu$ , alors pour tout  $a, b \in \mathbf{R}$ , il existe  $c \in \mathbf{R}$  dépendant uniquement de  $a$  et de  $b$  tel que  $aX + bY$  a la même loi que  $cZ$  où  $Z$  est une variable aléatoire de loi  $\mu$ "

1. Montrer que si  $\mu$  est la loi de probabilité  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2 > 0$  alors la propriété **S** est vérifiée (**1pt**).
2. Dans toute la suite on suppose  $X$  est une variable aléatoire ayant pour loi  $\mu$  vérifiant **S** et on note  $\psi_X$  sa fonction caractéristique. Montrer que  $\psi_X(u)\psi_X(-u) = |\psi_X(u)|^2$  pour tout  $u \in \mathbf{R}$  (**1pt**) et en déduire que  $\psi_X$  est une fonction réelle, positive et paire (**2pts**).
3. On peut montrer (ne pas le faire) que la propriété **S** implique qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$  tel que pour tout  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\psi_X(u) = \exp(\beta|u|^\alpha)$ . Montrer que l'on a nécessairement  $\beta < 0$  (**1pt**) et  $\alpha > 0$  (**1pt**). En utilisant les dérivées de  $\psi$ , montrer que si  $\alpha \leq 1$ , alors  $\mathbb{E}[|X|] = \infty$  et si  $\alpha > 1$ , alors  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  et  $\mathbb{E}[X] = 0$  (**1pt**). Enfin, montrer que  $\alpha \leq 2$  (**1.5pts**). Quelle est la loi  $\mu$  si  $\alpha = 2$  (**0.5pts**)?
4. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une suite de v.a.i.i.d. de fonction caractéristique  $\psi_X$ . Pour  $\gamma > 0$ , démontrer que  $Z_n = \frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^n X_k$  a la même loi que  $cX_0$ , où l'on précisera  $c$  en fonction de  $n$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  (**1pt**). Pour quelle valeur de  $\gamma$ ,  $Z_n$  converge-t-elle en loi (**1.5pts**)? Si  $\alpha = 1$ , en déduire la convergence en loi de  $\bar{X}_n$  (**0.5pts**). La loi faible des grands nombres est-elle alors vérifiée (**0.5pts**)? Et si  $\alpha > 1$  (**0.5pts**).

### Exercice 3 (Sur 16 points)

Soit  $(X, Y)$  un vecteur gaussien défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$  et soit  $S = X^2 + Y^2$ .

1. Montrer que  $S$  est une variable aléatoire (**0.5pts**).
2. Montrer que si  $S$  appartient à un ouvert  $U$  de  $[0, +\infty[$  alors  $(X, Y)$  appartient à un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  (**0.5pts**). Rappeler une condition (C) pour que  $(X, Y)$  suive une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^2$  (**1pt**). Sous cette condition (C), en déduire que  $\mathbb{P}(S \in U) > 0$  (**1pt**) et déterminer  $S(\Omega)$  (**1pt**). Montrer que  $S(\Omega)$  peut être différent si la condition (C) n'est pas vérifiée (**2pt**).
3. On suppose désormais que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Déterminer la densité  $f_{(X,Y)}(x, y)$  du vecteur  $(X, Y)$  (**0.5pts**).
4. Soit  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  mesurable bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}[g(S, X)] = \int_0^{+\infty} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} g(s, y) f_{(X,Y)}(\sqrt{s-y^2}, y) \frac{dy ds}{\sqrt{s-y^2}} \quad (\mathbf{1.5pts}).$$

En déduire que le vecteur aléatoire  $(S, Y)$  admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^2$ :

$$f_{(S,Y)}(s, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s-y^2}} e^{-s/2} \mathbb{1}_{|y| < \sqrt{s}} \quad \text{pour } (s, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \quad (\mathbf{1pt}).$$

5. En déduire que  $S$  suit une loi exponentielle de paramètre  $1/2$  (**2pts**).
6. On considère un vecteur aléatoire  $(Z, \theta)$  où  $Z$  et  $\theta$  sont indépendantes de lois respectives exponentielle de paramètre  $1/2$  et uniforme sur  $[0, 2\pi]$ . Montrer que pour toute fonction  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  mesurable bornée

$$\mathbb{E}[g(\sqrt{Z} \cos(\theta), \sqrt{Z} \sin(\theta))] = \mathbb{E}[g(X, Y)] \quad (\mathbf{2pts}).$$

7. Si  $U_1$  et  $U_2$  sont 2 v.a. indépendantes de même loi uniforme sur  $]0, 1[$ , quelle est la loi du vecteur aléatoire  $(\sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2), \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2))$  (justifier) (**2.5pts**). Quel est l'intérêt pratique de ce résultat (**0.5pts**)?