Troisième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2024 – 2025

Statistique 2

Contrôle Continu 2, Avril 2025

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 11 points)

On suppose que (X, Y) est un vecteur aléatoire de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ avec pour densité:

$$f(x,y) = K\, e^{-\frac{1}{8}(x^2+4y^2)}\, \mathrm{I\!I}_{xy\geq 0} \qquad \text{pour } (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

où $K \in \mathbf{R}$.

1. Tracer dans le plan l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ xy \geq 0\}$ **(1pt)**.
2. Démontrer que $K = (2\pi)^{-1}$ **(1.5pts)**.
3. Déterminer les lois marginales de X et de Y **(2pts)**. Que peut-on en conclure quant à l'indépendance entre X et Y **(1pt)**?
4. Démontrer que la corrélation entre X et Y est telle que $\mathrm{cor}(X,Y) = 2/\pi$ **(2.5pts)**. En déduire la densité d'un vecteur gaussien $Z = (Z_1, Z_2)$ de mêmes lois marginales que celles de X et de Y et de corrélation $2/\pi$ **(2.5pts)**. En déduire que (X, Y) n'est pas un vecteur gaussien **(0.5pts)**.

Préambule de l'exercice 2 (Sur 5 points)

1. Soit U et V deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Démontrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\mathbb{P}(U + V \geq 2\,\varepsilon) \leq \mathbb{P}(U \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(V \geq \varepsilon)$ (vous pouvez vous aider d'un dessin) **(2pts)**.
2. Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires convergeant en probabilités. En vous aidant de la question précédente, démontrer que la suite $(Z_{n+1} - Z_n)_n$ converge en probabilité vers 0 **(3pts)**.

Exercice 2 (Sur 15 points)

On considère $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ avec $\sigma_\varepsilon^2 > 0$. Soit X_0 une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 > 0$ et X_0 indépendante de $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$. Pour $\alpha \in]-1, 1[$, on définit alors par récurrence:

$$X_n = \alpha\, X_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}^*.$$

1. Montrer que (X_0, X_1) est un vecteur gaussien **(1pt)**, donner la loi de X_1 **(1pt)**. Suivant les valeurs de α, les variables X_0 et X_1 sont-elles indépendantes **(1pt)**?
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $X_n = \alpha^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$ **(1.5pts)**. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien **(1.5pts)**. Déterminer la loi de X_k pour $k \geq 1$ **(1pt)**.
3. Démontrer que les X_i ont toutes la même loi si et seulement si $(1-\alpha^2)\,\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$ **(1pt)**. Dans un tel cas, démontrer que $\mathrm{cov}(X_k, X_\ell) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}\,\alpha^{|\ell-k|}$ pour $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$ **(2pts)**. En déduire la loi du vecteur $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ **(1pt)**.
4. On ne suppose plus nécessairement que $(1-\alpha^2)\,\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$. Démontrer que (X_n) converge en loi et préciser sa loi limite **(2pts)**.
5. Que peut-on dire quant à la convergence en probabilité de (X_n) (utiliser le préambule) **(2pts)**?