Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2023 – 2024

Test 2 de Statistique 2

Soit deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, avec $(m_1, m_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(\sigma_1, \sigma_2) \in]0, \infty[^2$. Soit Y une variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, indépendante de X_1 et X_2. Soit enfin Z définie par:

$$Z = Y\,X_1 + (1 - Y)\,X_2.$$

1. Si $p = 1$, déterminer la loi de Z.
2. Désormais $p \in [0, 1]$ quelconque. Quel est l'ensemble des valeurs prises par Z?
3. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
4. Déterminer la fonction de répartition de Z et en déduire que sa loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et que sa densite vaut:
$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \Big(p\,\frac{1}{\sigma_1}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-m_1)^2} + (1-p)\,\frac{1}{\sigma_2}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-m_2)^2} \Big) \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}.$$
5. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes? Et X_1 et Z?
6. Démontrer que pour $p \in]0, 1[$ et $m_1 < m_2$, f_Z admet un extremum local situé entre m_1 et m_2. A quelles conditions Z peut-elle être une variable gaussienne?