Université de Paris et Université Paris 1

Master 2 MO 2022 – 2023

Analyse des séries financières

Examen final, Février 2023

3h00, sans aucun document

Exercice 1

1. On considère une série chronologique gaussienne $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ telle que les X_t sont des variables aléatoires identiquement distribuées. $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-elle toujours stationnaire d'ordre 2 (justifier)?

2. Soit une série chronologique gaussienne stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de densité spectrale f vérifiant $\int_{-\pi}^{\pi} |\log(f(t)|\, dt < \infty$. Montrer alors que (X_t) est un processus linéaire gaussien.

3. Soit un processus linéaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ d'ordre 2 et stationnaire. Montrer que $\operatorname{cov}(X_0, X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire qu'une série chronologique gaussienne stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas toujours un processus linéaire (on pourra considérer le cas particulier $X_t = X_0$ for any $t \in \mathbb{Z}$). Dans ce cas particulier, quelle est alors la densité spectrale?

Exercice 2

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires centrées indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}\left[\varepsilon_0^2\right] = 1$. Soit la série chronologique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \alpha\, X_{t-1} + \eta_t \quad \text{où} \quad \eta_t = \varepsilon_t \sqrt{a_0 + a_1\, \eta_{t-1}^2}$$

avec $|\alpha| < 1$, $a_0 > 0$ et $0 < a_1 < 1$.

1. Quel type de processus est (X_t)? Démontrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire, puis qu'elle est stationnaire d'ordre 2.

2. Démontrer que (X_t) est un processus causal par rapport à (ε_t).

3. Démontrer que (X_t) est un processus affine causal dont les fonctions espérance et variance conditionnelles sont pour tout $t \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} F^t &= F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) = \mathbb{E}\left[X_t \mid (X_{t-k})_{k\geq 1}\right] = \alpha\, X_{t-1} \\ \text{et} \quad M^t &= M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) = \sqrt{\operatorname{var}\left(X_t \mid (X_{t-k})_{k\geq 1}\right)} = \sqrt{a_0 + a_1\big(X_{t-1} - \alpha\, X_{t-2}\big)^2}. \end{aligned}$$

4. On suppose une trajectoire observée $(X_1, \ldots, X_n)$ où n est suffisamment grand et $\theta = {}^t(\alpha, a_0, a_1)$. Donner l'expression exacte de l'estimateur par quasi-maximum de vraisemblance de θ.

5. Soit les réels $0 < \rho < 1$, $0 < \underline{a}_0 < \overline{a}_0$ ans $0 < \underline{a}_1 < \overline{a}_1 < 1$ et on note $\Theta = [-\rho, \rho] \times [\underline{a}_0, \overline{a}_0] \times [\underline{a}_1, \overline{a}_1]$. En renommant F^t et M^t par F^t_θ et M^t_θ, démontrer que pour tout $\theta, \theta' \in \Theta$, alors si $F^t_\theta = F^t_{\theta'}$ et $M^t_\theta = M^t_{\theta'}$ alors $\theta = \theta'$.

6. Déterminer en fonction de $\rho, \underline{a}_0, \overline{a}_0, \underline{a}_1$ et $\overline{a}_1$ les coefficients

$$\beta_j(F) = \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{(x_j)_{j \geq 1}} \Big| \frac{\partial}{\partial x_j} F_\theta\big((x_j)_{j\geq 1}\big)\Big| \quad \text{et} \quad \beta_j(M) = \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{(x_j)_{j \geq 1}} \Big| \frac{\partial}{\partial x_j} M_\theta\big((x_j)_{j\geq 1}\big)\Big|.$$

   En déduire que $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta$.

7. Expliquer pourquoi $\sqrt{n}\,\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big)$ tend en loi vers une distribution gaussienne quand $n \to \infty$.

8. Aurait-on pu imaginer une méthode en 2 étapes pour estimer θ?

Exercice d'application du logiciel `R`

On s'intéresse à modéliser la cotation quotidienne en clôture de l'action Amazon (variable `CoteAMZ`) du 25/01/2010 au 24/01/2023, soit `m=3273` données. On utilise le logiciel `R` à cet effet.

1. Voici les premières commandes effectuées:

```
CoteAMZr=log(CoteAMZ[2:m]/CoteAMZ[1:(m-1)])
Box.test(CoteAMZr, lag = 10, type = c("Ljung-Box"))
Box.test(CoteAMZr^2, lag = 10, type = c("Ljung-Box"))
```

   Avec pour résultats numériques:

```
Box-Ljung test

data:  CoteAMZr
X-squared = 12.077, df = 10, p-value = 0.2799

Box-Ljung test

data:  CoteAMZr^2
X-squared = 110.16, df = 10, p-value < 2.2e-16
```

   Question II.1: Qu'a-t-on fait? Quelles conclusions en tirer?

2. On exécute alors:

```
library("fGarch")
CoteAMZr=CoteAMZr-mean(CoteAMZr)
FitX11=garchFit(~ garch(1,1), data = CoteAMZr, trace = FALSE)
FitX11@fit$coef
Htga=FitX11@h.t
(sum(CoteAMZr^2/Htga+log(Htga)+log(2*pi))+log(nn)*4)/nn
```

   Avec pour résultats numériques:

```
           mu         omega        alpha1         beta1
-2.017800e-19  3.732832e-05  1.590489e-01  7.696542e-01

[1] -5.014366
```

Question II.2: Expliquer ce que sont les 5 nombres obtenus? A quel résultat aboutit-on (formaliser...)?

3. On continue alors par:

```
FitXap=garchFit(~ aparch(1,0), data = CoteAMZr, trace = FALSE)
FitXap@fit$coef
Htap=FitXap@h.t
(sum(CoteAMZr^2/Htap+log(Htap)+log(2*pi))+log(nn)*5)/nn
```

On obtient alors:

```
           mu         omega        alpha1        gamma1         delta
-2.017800e-19  4.749725e-04  2.664175e-01  5.934013e-02  1.907319e+00

[1] -4.897561
```

Question II.3: Expliquer ce que sont les 6 nombres obtenus? A quelle conclusion aboutit-on?

4. On tape enfin:

```
library(KScorrect)
Lc=LcKS(FitX11@residuals, cdf = "pnorm")
Lc$p.value
```

Et on obtient le réultat:

```
$p.value
[1] 2e-04
```

Question II.4: Qu'a-t-on fait et que peut-on en déduire?