Troisième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2023 – 2024

Statistique 2

Contrôle Continu 1, Mars 2024

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 9 points)

On s'intéresse à la durée de vie T d'une ampoule électrique. Après observation du comportement d'un grand nombre d'ampoules, on modélise T (en milliers d'heures) de la façon suivante: T est une variable aléatoire (v.a.) définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont la fonction de répartition F_T est telle qu'avec $a > 0$ et $b \in \mathbf{R}$:

$$F_T(x) = \frac{1}{10}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) + \frac{9}{10}\left(1 - \frac{1}{(1+x^a)^b}\right)\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une condition sur (a, b) pour que F_T soit bien une fonction de répartition (justifier rigoureusement qu'elle en est une!) **(1.5pts)**. Quelle est la probabilité qu'une ampoule vive exactement 1000 heures **(0.5pts)**? Strictement moins de 1000 heures **(0.5pts)**? Ait une durée de vie nulle **(0.5pts)**?
2. Décomposer, en justifiant, $\mathbb{P}_T$, mesure de probabilité associée à F_T, sous la forme d'une somme pondérée d'une masse de Dirac et d'une mesure de probabilité μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la densité **(2pts)**. Pour $I = [\alpha, \beta]$ intervalle de $\mathbf{R}_+$, donner l'expression de $\mu(I)$ **(0.5pts)**.
3. Donner l'expression générale de $\mathbb{E}[T]$ (on ne cherchera pas à simplifier l'intégrale) **(0.5pts)**. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $\mathbb{E}[T] < \infty$ **(1pt)**?
4. Dans le cas où $a = 2$ et $b = 1$, calculer $\mathbb{E}[T]$ **(1pt)** et $\mathrm{var}(T)$ **(1pt)**.

Exercice 2 (Sur 8 points)

Soit le vecteur aléatoire (X, Y) défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que la loi de (X, Y) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ avec pour densité $f_{(X,Y)}$. On note $M = \max(X, Y)$.

1. Montrer que M est une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **(1pt)**.
2. Dans le cas où X et Y sont indépendantes, rappeler les expressions des densités f_X et f_Y de X et de Y **(0.5pts)**. Démontrer que M est une v.a. de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ **(1pt)**. Préciser sa densité f_M en fonction de f_X et de f_Y **(1pt)**, puis en déduire que pour presque tout $m \in \mathbf{R}$,

$$\textbf{(1pt)} \qquad f_M(m) = \int_{-\infty}^{m} \left(f_{(X,Y)}(z, m) + f_{(X,Y)}(m, z)\right) dz. \tag{1}$$

3. On ne suppose plus X et Y indépendantes. Montrer que $\mathbb{P}(M \le m) = \mathbb{P}(X \le Y \le m) + \mathbb{P}(Y \le X \le m)$ pour tout $m \in \mathbf{R}$ **(1pt)**. En déduire que M est une v.a. de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et préciser sa densité en fonction de $f_{(X,Y)}$ **(2.5pts)**.

Exercice 3 (Sur 6 points)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a. indépendantes toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi commune de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p \le 1$. Soit N une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendante de $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$, et suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{avec la convention} \quad \sum_{i=1}^{0} X_i = 0.$$

1. Montrer que Z est une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **(1.5pts)** et déterminer ses valeurs possibles **(0.5pts)**.
2. Pour $(n, k) \in \mathbf{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}(Z = k \cap N = n)$ en traitant à part le cas $n = 0$ **(2pts)**. En déduire que Z suit une loi de Poisson de paramètre $p\,\lambda$ **(2pts)**.